1.1 le théorème de décomposition des noyaux

Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme de E. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'endomorphisme u^n par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $u^{i+1} = u^i \circ u$. Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients dans **K** on définit l'élément de $L(E)$ noté $P(u)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$.

L'ensemble $\mathbf{K}[X].u = \{P(u) \,/\, P \in \mathbf{K}[X]\}$ muni de l'addition, la multiplication par un scalaire et la composition des applications est alors une sous-algèbre commutative de $L(E)$.

Enfin l'application qui à un polynôme P associe $P(u)$ est un homomorphisme d'algèbres. On a donc pour tous polynômes P et Q, tout scalaire α et tous endomorphismes u et v de E :

$$(P + Q)(u) = P(u) + Q(v);\quad (\alpha P)(u) = \alpha P(u) \text{ et } (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Théorème de décomposition des noyaux : Soit u un endomorphisme de E et $P_1, \dots , P_q$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. Posons $P = P_1 \times\dots\times P_q$. Alors on a :

$$\mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_q(u).$$

Démonstration :

Cas $q = 2$: $\mathbf{K}[X]$ est un anneau principal (voir « anneaux ») et P_1 et P_2 sont premiers entre eux donc d'après la relation de Bezout il existe U et V dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$ d'où $UP_1(u) + VP_2(u) = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, P(u)$. On a $x = UP_1(u)(x) + VP_2(u)(x) = y + z$ en posant $y = UP_1(u)(x)$ et $z = VP_2(u)(x)$. Mais d'après les propriétés de l'algèbre $\mathbf{K}[X].u$: $P_2(u)(y) = UP_1P_2(u)(x) = U(u)\circ P_1P_2(u)(x) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}\, P(u)$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, P_2(u)$; de même on montre que $z \in \mathrm{Ker}\, P_1(u)$ d'où $E = \mathrm{Ker}\, P_1(u) + \mathrm{Ker}\, P_2(u)$.

D'autre part si $x \in \mathrm{Ker}\, P_1(u) \cap \mathrm{Ker}\, P_2(u)$, la relation $x = UP_1(u)(x) + VP_2(u)(x) = U(u)\circ P_1(u)(x) + V(u)\circ P_2(u)(x)$ montre que $x = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(u)$.

On termine facilement par récurrence sur q en utilisant que si P_1 est premier avec $P_2, \dots , P_q$ il est premier avec leur produit.

Remarques :

les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, P_k(u)$ sont stables par u (car si $x \in \mathrm{Ker}\, P_k(u)$, on a $P_k(u)(u(x)) = u(P_k(u)(x)) = u(0) = 0$).

Si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul de E) alors $E = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_q(u)$.

Exercice 1

Soit A une matrice non nulle de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = - A$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.