1.2 Polynômes minimal et caractéristique d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E. Soit I_u l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{K}[X]$tels que $P(u) = 0$. Il est clair que I_u est un idéal de K[X] (appelé *idéal annulateur de u*); K[X] étant un anneau principal (voir « anneaux et corps ») il existe un polynôme μ engendrant I_u (i.e $I_u = (\mu)$). De plus μ est unique si on le normalise (coefficient dominant égal à 1).

Définition : on appelle *polynôme minimal* de u l'unique polynôme μ normalisé tel que $I_u = (\mu)$.

Remarques :

L(E) étant de dimension finie (n^2) la famille (Id_E, u, ..., u^{n^2}) est liée : il existe donc une combinaison linéaire nulle de ses éléments qui est non triviale. Par conséquent $I_u \neq (0)$ et a donc $1 \leq$ d°$\mu \leq n^2$ (en fait on a d°$P \leq n$: voir (i) de la proposition suivante).

μ est caractérisé par :

1/ μ est unitaire;

2/ $\mu(u) = 0$;

3/ Pour tout polynôme P on a : $P(u) = 0 \Rightarrow P$ multiple de μ.

Définitions : le *polynôme caractéristique* d'une matrice M est le polynôme χ_M à coefficients dans $\mathbf{K}$ défini par :

$\chi_M(X) = \text{dét}(XI_n - M)$ (où $XI_n - M$ est une matrice à coefficients dans l'anneau $\mathbf{K}[X]$).

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E est le polynôme caractéristique d'une de ses matrices dans une base de E (ce polynôme ne dépend pas du choix de cette base). On le note χ_u ou χ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On rappelle que χ est un polynôme unitaire de degré n.

Propriétés : Soit u un endomorphisme de E.

(i) Le polynôme minimal μ de u divise son polynôme caractéristique χ;

(ii) Toute racine de χ est aussi racine de μ ;

(iii) Si le corps $\mathbf{K}$ est algébriquement clos (par exemple $\mathbf{K} = \mathbb{C}$) et si $\chi(X) = \prod_{k=0}^{p}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ ($\alpha_k > 0$ et les λ_k distincts deux à deux) alors $\mu(X) = \prod_{k=0}^{p}(X - \lambda_k)^{\beta_k}$ avec $0 < \beta_k \leq \alpha_k$.

(iv) u est diagonalisable ssi μ n'a que des racines simples.

La propriété (i) peut aussi s'écrire : $\chi(u) = 0$ autrement dit un *endomorphisme vérifie son polynôme caractéristique* (*théorème de Cayley-Hamilton*) : voir une démonstration à l'exercice 11.

Le (i) montre que d°$\mu \leq$ d°$\chi = n$

Dans le (iii) $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u.

Démonstration :

(i) D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi(u) = 0$ donc μ divise χ.

(ii) Dire que λ est racine de χ signifie que λ est valeur propre de u i.e qu'il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$. Pour tout polynôme P on voit que $P(u)(x) = P(\lambda)x$. En prenant $P = \mu$ il vient $\mu(\lambda)x = 0$ soit $\mu(\lambda) = 0$ car x est non nul.

(iii) D'après le (i) et le (ii) les polynômes χ et μ ont les même racines. Comme μ divise χ on a le résultat voulu.

(iv) *Condition nécessaire* : si u est diagonalisable il existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale; si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les élément distincts deux à deux de la diagonale et si

$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$ alors $P(u) = 0$ puisque chaque vecteur de la base B est annulé par $u - \lambda_k \mathrm{Id}_E$ pour un k de $\{1, \dots, p\}$. Par conséquent μ divise P et comme P n'a que des racines simples μ aussi.

Condition suffisante : si $\mu = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$ avec les λ_k distincts deux à deux on a, d'après le théorème de décomposition des noyaux $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda_2\mathrm{Id}) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda_p\mathrm{Id})$ donc u est diagonalisable.

Exercice 2

Soit **K** un corps algébriquement clos et f un endomorphisme de E tel que f^2 soit diagonalisable. Montrer que :

$$f \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(f^2).$$

(Utiliser le théorème de décomposition des noyaux).

Exercice 3

Combien de solutions dans $M_3(\mathbb{C})$ l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ possède t-elle ?

Exercice 4

1°/ Supposons que $E = E_1 + \dots + E_p$ où les E_k sont des sous-espaces vectoriels stables par u. Soit μ_k le polynôme minimal de la restriction u/E_k de u à E_k ($1 \le k \le p$). Montrer que $\mu = \mathrm{ppmc}(\mu_k)$ (et μ unitaire).

2°/ Si la somme précédente est directe et si χ_k est le polynôme caractéristique de u/E_k alors : $\chi = \prod_{k=1}^{p} \chi_k$.

<u>Exemple</u> : calculer le polynôme minimal de la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

(Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. En calculant $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$ on constate qu'on a la relation de dépendance : $f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0$. Le polynôme $P = X^2 + 10X + 100$ annule donc la restriction de f au sous-espace vectoriel (de dimension 2) $E_1 = \langle e_1, f(e_1)\rangle$ engendré par e_1 et $f(e_1)$. On vérifie que $P(u)(e_2) = 0$ donc P annule la restriction de f au sous-espace vectoriel $E_2 = \langle e_2, f(e_2), f^2(e_2), \dots\rangle$. Comme $f(e_2)$ n'est pas colinéaire à e_2 ce sous-espace vectoriel est de dimension au moins 2. On a donc $\dim(E_1 \cap E_2) = 0$ ou 1. Si $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$ alors le polynôme minimal de la restriction de f à $E_1 \cap E_2$ serait un polynôme de degré 1 qui diviserait P ce qui est absurde car P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Par conséquent on a $\dim(E_1 \cap E_2) = 0$ et $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$. Le polynôme P, irréductible, unitaire et annulant u est donc le polynôme minimal de u.)

Exercice 5

Calculer le polynôme minimal des matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire A^n et B^n pour $n \in \mathbb{N}$.