1.3 Endomorphismes nilpotents

<u>Définitions</u> : Un endomorphisme u de E est dit *<u>nilpotent</u>* sii il existe un entier naturel p non nul tel que $u^p = 0$.

On pose alors $\nu = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N} \,/\, u^k = 0\}$. L'entier naturel non nul ν est appelé *<u>indice de u</u>*.

Exercice 6

Soit u un endomorphisme nilpotent non nul d'indice ν et soit $x \in E$ tel que $u^{\nu-1}(x) \neq 0$. Montrer que le système $(x, u(x), \ldots , u^{\nu-1}(x))$ est libre. En déduire que $\nu \leq n$.

Exercice 7

Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $v = \mathrm{Id} - u$ est inversible. Quel est son inverse ? Calculer v^n pour $n \in \mathbb{N}$.

<u>Application</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$) et A^{-1}.

Exercice 8

1°/ Soit δ un endomorphisme nilpotent. Montrer que $\mathrm{dét}(\mathrm{Id} + \delta) = 1$.

(Considérer le polynôme caractéristique de δ).

2°/ Soit $u \in L(E)$ tel que $u\delta = \delta u$. Montrer que u et $u + \delta$ ont même polynôme caractéristique et que $\mathrm{dét}(u + \delta) = \mathrm{dét}(u)$ (supposer d'abord u inversible).