1.4 Décomposition de *E* en somme directe de sous-espaces caractéristiques

Théorème : Soit u un endomorphisme de E tel que son polynôme caractéristique s'écrive $\chi(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$,

$\alpha_k > 0$ et les λ_k distincts deux à deux (autrement dit χ est scindé); alors son polynôme minimal est de la forme $\mu(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\beta_k}$ (avec $0 < \beta_k \leq \alpha_k$) (voir 1.2). On pose :

$N_k = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k}$. Alors :

(i) E est somme directe des N_k ($1 \leq k \leq p$);

(ii) $N_k = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k}$;

(iii) λ_k est la seule valeur propre de la restriction u/N_k de u à N_k;

(iv) Dim $N_k = \alpha_k$;

(v) la restriction $v_k = (u - \lambda_k\mathrm{Id})/N_k$ de $u - \lambda_k\mathrm{Id}$ à N_k est nilpotente d'indice β_k ($1 \leq k \leq p$);

Les sous-espaces vectoriels $N_k = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\alpha_k} = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k}$ sont appelés *sous-espaces caractéristiques* (ou *spectraux*) de u.

Démonstration :

(i) Comme $\chi(u) = 0$ il résulte du théorème de décomposition des noyaux que E est somme directe des N_k;

(ii) comme $\mu(u) = 0$ on a pour les même raisons $E = \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_r}$. Mais $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k} \subset N_k$ pour $1 \leq k \leq p$ donc dim $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k} \leq$ dim N_k. D'autre part $n = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{dimKer}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{dim} N_k$ par conséquent dim $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k}$ = dim N_k et $\mathrm{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k} = N_k$.

(iii) soit λ une valeur propre de u/N_k . Il existe $x \in N_k - \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $\left(u-\lambda_k \mathrm{Id}_E\right)^{\alpha_k}(x) = 0$ il vient $\left(\lambda-\lambda_k\right)^{\alpha_k} x = 0$, soit $\left(\lambda-\lambda_k\right)^{\alpha_j} = 0$ (puisque x est non nul) ou $\lambda = \lambda_k$;

(iv) posons d_k = dim N_k. D'après l'exercice 4 2°/ on a $\chi = \prod_{k=1}^{p}\chi_k$ où χ_k est le polynôme caractéristique de u/N_k.

D'après le (iii) $\chi_k = \left(X-\lambda_k\right)^{d_k}$ soit $\chi = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{d_k}$ donc $d_k = \alpha_k$ pour $1 \leq k \leq p$;

(v) d 'après (ii) $v_k^{\beta_k} = 0$. Supposons que pour un $j \in \{1; \ldots ; p\}$ on ait $v_j^{\beta_j - 1} = 0$. Alors le polynôme $(X-\lambda_j)^{\beta_j-1}\prod_{k\neq j}\left(X-\lambda_k\right)^{\beta_k}$ annulerait u puisqu'il annule u/N_k pour $1 \leq k \leq p$ et donc $\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\beta_k}$ ne serait pas le polynôme minimal de u.

Remarques :

Le théorème précédent s'applique à tout endomorphisme u d'un espace vectoriel sur un corps **K** algébriquement clos ($\mathbb{C}$ par exemple);

Dans les conditions du théorème précédent, si on pose $E_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k\mathrm{Id}_E)$, on retrouve le résultat : *u est diagonalisable ssi dim* $E_k = \alpha_k$ *pour* $1 \leq k \leq p$.

(en effet u est diagonalisable ssi $\beta_k = 1$ pour $1 \leq k \leq p$ (proposition (iv) du 1.2) donc $N_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k\mathrm{Id}_E) = E_k$ = sous-espace propre relatif à la valeur propre λ_k donc dim $E_k = \alpha_k$. Réciproquement si dim $E_k = \alpha_k$ alors $E_k = N_k$ (car on a toujours $E_k \subset N_k$) donc E est somme directe des N_k i.e u est diagonalisable).

Dans une base adaptée à la décomposition de E en somme directe des N_k la matrice de u est une matrice diagonale de matrices : $\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_p \end{pmatrix}$ où M_K = matrice de la restriction u/N_k de u à N_k.

Exercice 9

1°/ Soit M une matrice dont le polynôme caractéristique $\chi(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ est scindé. Soit $\mu(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\beta_k}$ sont polynôme minimal. Montrer que, si M est inversible, il existe des matrices $A_{i,k}$ indépendantes dans $M_n(n)$ telles que pour tout q de $\mathbb{N}$ on a :

$$M^q = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^q\left(\sum_{k=0}^{\beta_i-1}q^k A_{i,k}\right).$$

Si M 'est pas inversible et λ_j est la valeur propre nulle la relation précédente est valable pour tout entier naturel q supérieur ou égal à β_j.

2°/ Applications aux suites récurrentes :

s étant un entier naturel non nul, et α_i $(0 \le i \le s-1)$ s scalaires, avec α_0 non nul, soit (S') l'ensemble des suites (x_n) à valeurs dans K vérifiant la relation de récurrence :

$$x_{n+s} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + \dots + \alpha_{s-1}x_{n+s-1}.$$

Soit l'équation $P(r) = r^s - \sum_{k=0}^{s-1}\alpha_k r^k = 0$ (appelée *équation caractéristique de* (x_n)).

L'ensemble (S') est un espace vectoriel de dimension s. Si le polynôme P est scindé et si $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ *sont les racines de P de multiplicités respectives* $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ *une base de (S') est* $\left(n^k\lambda_i^n\right)_{\substack{1\le i\le q\\ 0\le k\le \alpha_i-1}}$

Etant donné $(y_0, \dots, y_{s-1}) \in K^p$ *il existe un unique élément de (S') tel que* $x_0 = y_0, \dots, x_{s-1} = y_{s-1}$.

(Réf. : Ramis tome 1, p 415 à 417).

3°/ Autre application : convergence de A^q

Soit A une matrice (n, n) à coefficients complexes. On pose $\rho(A) = \operatorname{Max}_{\in Sp(A)}|\lambda|$ (appelé *rayon spectral* de A). Montrer que : (A^q converge vers 0 ssi $\rho(A) < 1$).

Le paragraphe suivant donne un autre exemple d'application du théorème précédent.