1.5 Décomposition $u = d + \delta$ d'un endomorphisme

<u>Théorème</u> : Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel tel que son polynôme caractéristique soit scindé (c'est le cas si le corps $\mathbf{K}$ algébriquement clos, par exemple $\mathbb{C}$).

Alors u s'écrit de façon unique $u = d + \delta$ où d est un endomorphisme diagonalisable de E et δ un endomorphisme nilpotent de E tels que $d\delta = \delta d$.

De plus d et δ sont des polynômes en u à coefficients dans $\mathbf{K}$.

<u>Démonstration</u> : admettons provisoirement le lemme suivant :

<u>lemme</u> :

(i) Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables tels que $fg = gf$. Alors f et g se diagonalisent dans une même base.

(ii) Soient f et g deux endomorphismes nilpotents qui commutent. Alors leur somme est nilpotente.

Existence de la décomposition : reprenons les notations du théorème du 1.4. Si u_k et v_k sont les restrictions de u et de $u - \lambda_k\mathrm{Id}$ à N_k on a $u_k = \lambda_k\mathrm{Id} + (u - \lambda_k\mathrm{Id}) = \lambda_k\mathrm{Id} + v_k$; $\lambda_k\mathrm{Id}$ est diagonalisable et v_k est nilpotent dans N_k et ces deux endomorphismes commutent. Les endomorphisme d et δ de E définis par $d/N_k = \lambda_k\mathrm{Id}$ et $\delta/N_k = v_k$ répondent à la question. Remarquons que $d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k$ où π_k sont les projecteurs sur N_k parallèlement à $\underset{j \neq k}{\oplus} N_j$.

Montrons d'abord que d et δ définis précédemment sont des polynômes en u.

Posons $P_j = \dfrac{\chi}{\left(X - \lambda_j\right)^{\alpha_j}} = \prod_{k \neq j} \left(X - \lambda_k\right)^{\alpha_k}$ $(1 \leq j \leq p)$.

Les polynôme P_j sont premiers entre eux dans leur ensemble; d'après le théorème de Bezout il existe des polynômes $Q_1, \dots, Q_p$ tels que $P_1Q_1 + \dots + P_pQ_p = 1$. On a donc :

$$P_1(u)Q_1(u) + \dots + P_p(u)\,Q_p(u) = \mathrm{Id}_E.$$

Posons $\pi_k = P_k(u) \circ Q_k(u)$ pour $1 \leq k \leq p$. Pour tout x de E on a donc $x = \sum_{k=1}^{p} \pi_k(x)$.

Mais $\pi_k(x) \in N_k$ (car $\left(X - \lambda_k\right)^{\alpha_k} P_kQ_k = \chi Q_k$ donc $\left(u - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k} \pi_k(x) = Q_k(u)\chi(u)(x) = 0$, car $\chi(u) = 0$) donc la somme précédente est la décomposition de x dans la somme directe $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_p$. On en déduit que

$\pi_k(x)$ est le projeté de x sur N_k parallèlement à $\underset{i \neq k}{\oplus} E_i$; $\pi_k = P_k(u)\,Q_k(u)$ est donc la projection sur N_k parallèlement à $\underset{i \neq k}{\oplus} E_i$ et c'est un polynôme en u.

Avec les notation précédentes on a $d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k$ et $\delta = u - d$ qui sont bien des polynômes en u puisque c'est le cas de π_k.

Unicité de la décomposition : soient D et N deux endomorphismes tels que $u = D + N$ et vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme D et N commutent ils commutent avec u d'après l'égalité précédente donc ils commutent avec d et δ puisque ce sont des polynômes en u. On écrit $h = D - d = \delta - N$. D'après le lemme (i) $h = D - d$ est diagonalisable (car d et D commutent donc sont diagonalisables dans la même base d'après le (i) du lemme); de plus $h = \delta - N$ est nilpotent (lemme (ii)). On en déduit aisément que $h = 0$ soit $D = d$ puis que $N = \delta$.

Démonstration du lemme :

(i) Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$. Si $n = 1$ c'est évident. Supposons le résultat acquis pour tout espace vectoriel de dimension $< n$. Soit E dimension n et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeur propre de f. Si f est une homothétie le résultat est vrai (toute base qui diagonalise g diagonalise f). Si f n'est pas une homothétie E est somme directe des sous-espaces propres E_{λ_k} de f. Comme f et g commutent il est clair que les E_{λ_k} sont stables par g. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun des sous-espace vectoriel E_{λ_k} qui sont de dimension $< n$ (car f n'est pas une homothétie).

(ii) Soient p et q les indices de f et g. Comme f et g commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $(f+g)^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} C_{p+q}^{i} f^{i} g^{j}$ qui est nulle car dans chaque terme de la somme on a $i \geq p$ ou $j \geq q$ donc $f^{i} = 0$ ou $g^{j} = 0$ ce qui achève la démonstration du lemme.

On a la traduction matricielle évidente : toute matrice A de $M_n(\mathbf{K})$ se décompose de façon unique en $A = D + N$ où D est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$, N une matrice nilpotente telles que $DN = ND$.

<u>Corollaire</u> :

(i) Dans les conditions du théorème précédent on a : u est diagonalisable ssi $\delta = 0$;

(ii) Tout matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ se décompose de façon unique en $A = D + N$ avec D et N dans $M_n(\mathbb{R})$, D diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et N une matrice nilpotente telles que $DN = ND$.

<u>Démonstration</u> :

(i) si u est diagonalisable on écrit $u = u + 0$ et l'unicité de la décomposition donne $\delta = 0$. La réciproque est évidente;

(ii) si $M \in M_n(\mathbb{C})$ désignons par $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ il existe $D \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente telles que $A = D + N$ et $DN = ND$. A étant réelle on a $A = \overline{D} + \overline{N}$. $\overline{D}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, $\overline{N}$ est nilpotente et $\overline{D}.\overline{N} = \overline{N}.\overline{D}$. Par unicité de la décomposition on en déduit $\overline{D} = D$ et $\overline{N} = N$ donc D et N sont des matrices à coefficients réels.

Exemple : la démonstration du théorème donne un procédé effectif de calcul de D et N. Soit par exemple $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X-2)$. On a la décomposition en éléments simples $\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = -\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$ qui donne $1 = (X-1)^2 - X(X-2)$. La démonstration du théorème indique que $D = 2(A - \mathrm{I}_3)^2 - A(A - 2\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = A - D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on vérifie que $N^2 = 0$).

Exercice 10 : exponentielle d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $\exp(A) = \mathrm{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1°/ Montrer que cette série est convergente ($M_n(\mathbb{C})$ est par exemple muni de la norme : $\|M\| = \operatorname{Sup}_{\|X\|=1} \|MX\|$ où $\|X\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{C}^n$).

2°/ Soit $P \in GL(n, \mathbb{C})$. Montrer que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

3°/ Expliquer comment on peut calculer $\exp(A)$ si A est nilpotente, si A est diagonalisable puis dans le cas général.

<u>Exemple</u> : Calculer $\exp(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : avec les notations de la démonstration, si $d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k$ où π_k sont les projecteurs sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k} N_j$, on a, pour tout entier naturel q, $d^{q} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^q \pi_k$ (car $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $i \neq j$), donc $\exp(d) = \sum_{k \geq 0} \frac{d^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k} \pi_k$. Si on reprend l'exemple précédent on a donc : $\exp(D) = e^2(A - \mathrm{I}_3)^2 - A(A - 2\mathrm{I}_3)$. Comme $\exp(N) = \mathrm{I} + N$, on en déduit le calcul de $\exp(A)$ (= $(e^2(A - \mathrm{I}_3)^2 - A(A - 2\mathrm{I}_3)).(\mathrm{I} + N)$).