2.1 Définitions

Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques : Une application φ de $E\times E$ dans **K** est <u>*bilinéaire*</u> ssi elle est linéaire par rapport à chaque variable. Si de plus pour tout $(x, y) \in E\times E$ on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ on dit que φ est <u>*symétrique*</u>.

Formes sesquilinéaires et sesquilinéaire hermitiennes : Une application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$ est <u>*sesquilinéaire*</u> ssi elle est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième. Cela s'exprime par les identités :

(i) $\varphi(x + x', y) = \varphi(x , y) + \varphi(x', y)$ et $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x', y)$;

(ii) $\varphi(x , y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ et $\varphi(x , \alpha y) = \bar{\alpha}\, \varphi(x, y)$.

Si de plus pour tout $(x, y) \in E\times E$ on a $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y,x)}$ on dit que φ est <u>*hermitienne*</u>.

formes quadratiques : Une application q de E dans **K** est une <u>*forme quadratique*</u> ssi il existe une forme bilinéaire φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout x de E. On a alors les identités :

$q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$;

$q(x + y) = q(x) + q(y) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$;

$q(x + y) - q(x - y) = 2(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$ (pour tous x et y de E et tout α de **K**).

Il y-a une seule forme bilinéaire symétrique φ telle que $\varphi(x, x) = q(x)$, définie par :

$2\varphi(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ ou $4\varphi(x, y) = q(x + y) - q(x - y)$.

φ est appelée <u>*forme polaire*</u> de q.

***formes quadratiques hermitiennes** :* soit φ une forme sesquilinéaire et posons $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout x de E. On a alors les identités :

$q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x)$;

$q(x + y) = q(x) + q(y) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$;

$q(x + y) - q(x - y) + iq(x + iy) - iq(x - iy) = 4\varphi(x, y)$ (pour tous x et y de E et tout α de **K**);

q étant donnée la forme sesquilinéaire φ telle que $\varphi(x, x) = q(x)$ est définie de façon unique par :

$4\varphi(x, y) = q(x + y) - q(x - y) + iq(x + iy) - iq(x - iy)$.

On dit qu'une application q de E dans $\mathbb{C}$ est une <u>*forme quadratique hermitienne*</u> ssi il existe une forme sesquilinéaire <u>hermitienne</u> φ telle que, pour tout x de E, on ait : $q(x) = \varphi(x, x)$. On a alors $\forall\ x \in E : q(x) \in \mathbb{R}$.

φ est unique et est appelée <u>*forme polaire*</u> de q.

matrice de φ : Soit φ une forme bilinéaire ou sesquilinéaire et si $B = (e_i)$ $(1 \le i \le n)$ est une base de E la matrice $\Omega = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$ est appelée *matrice de φ* dans la base B.

Si X et Y sont les coordonnées de x et y dans cette base on vérifie que :

$\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$ si φ est bilinéaire et $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega\,\overline{Y}$ si φ est sesquilinéaire.

Exercice 16

1°/ Soit q une forme quadratique. Dans une base de E si $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, \dots , x_n)$ montrer que

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{i,j}x_i x_j .$$

Montrer que la forme polaire de q a pour matrice $M = (\alpha_{i,j})$ avec $\alpha_{i,i} = a_{i,i}$ et $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} = a_{i,j}/2$ si $i \neq j$.

2°/ Si q une forme quadratique hermitienne montrer que :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}|x_i|^2 + \sum_{i\neq j} a_{i,j}x_i\bar{x}_j \text{ avec } \overline{a_{i,j}} = a_{j,i}.$$

Montrer que la forme polaire de q a pour matrice $M = (a_{i,j})$.

Changements de bases : si $B' = (f_i)$ est une autre base et si P est la matrice de passage de B à B' la matrice Ω' de φ dans la base B' est donnée par : $\boxed{\Omega' = {}^tP.\Omega.P}$ (resp. $\boxed{\Omega' = {}^tP.\Omega.\overline{P}}$ si φ est sesquilinéaire).

(En effet dans le cas où φ est sesquilinéaire et si X et Y sont les coordonnées de x et y dans la base B et X' et Y' leurs coordonnées dans la base B' on a $X = PX'$ et $Y = PY'$ donc :

$$\varphi(x, y) = {}^tX\Omega\overline{Y} = {}^t(PX')\Omega(\overline{PY'}) = {}^tX'({}^tP\Omega\overline{P})\,\overline{Y'} = {}^tX'\Omega'\,\overline{Y'}$$ (où Ω' est la matrice de φ dans la base B').

L'égalité étant valable pour tous X' et Y' de $\mathbf{K}^n$ on en déduit que la matrice Ω' de φ dans la base B' est ${}^tP\Omega P$).

Orthogonalité : soit φ une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne; on dit que x et y de E sont orthogonaux par rapport à φ ssi $\varphi(x, y) = 0$. Si A est une partie quelconque de E l'orthogonal de A est la partie de E notée $A^\perp$ et définie par : $A^\perp = \{x \in E \,/\, \forall\, y \in A : \varphi(x, y) = 0\}$. Noter que si A est non vide, $A^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E même si A ne l'est pas.

Cône isotrope : avec les notations précédentes le cône isotrope de φ est défini par :

$C(\varphi) = \{x \in E \,/\, \varphi(x, x) = 0\}$ (c'est donc l'ensemble des x orthogonaux à eux même).

Positivité : une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne φ est *positive* ssi pour tout x de E on a

$\varphi(x, x) \geq 0$.

Formes définies : une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne φ est *définie* ssi on a :

$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

C'est équivalent à dire que son cône isotrope est réduit à $\{0\}$.

Propriété : soit φ une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne positive.

(i) Si φ est positive alors, pour tout $(x, y) \in E$ on a :

$|\varphi(x, y)| \leq (q(x).q(y))^{1/2}$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*). Il y a égalité si x et y sont colinéaires.

(ii) Si de plus φ est définie alors l'application $x \mapsto (\varphi(x, x))^{1/2}$ est une norme et il y a égalité dans l'inégalité précédente ssi x et y sont colinéaires.

Démonstration de la propriété :

(i) Soit φ une forme bilinéaire symétrique et $(x, y) \in E\times E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0$ soit $\lambda^2 q(x) + 2\lambda\varphi(x, y) + q(y) \geq 0$. Si $q(x) = 0$ on a $\lambda\varphi(x, y) + q(y) \geq 0$ pour tout λ de $\mathbb{R}$ donc on en déduit aisément que

$\varphi(x, y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Si $q(x) \neq 0$ on a un trinôme du second degré toujours ≥ 0 donc son discriminant réduit $\delta = (\varphi(x, y))^2 - q(y)q(x)$ est ≤ 0 ce qui démontre l'inégalité.

Soient x et y colinéaires. Si x ou y est nul l'inégalité précédente est une égalité. Sinon il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\lambda x + y = 0$ et le trinôme précédent a une solution donc $\delta = 0$ soit $|\varphi(x, y)| = (q(x).q(y))^{1/2}$.

Si φ est une forme sesquilinéaire hermitienne. On a $\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0$ pour tout λ complexe soit

$|\lambda|^2 a + 2\mathrm{Re}(\lambda b) + c \geq 0$ (*) en posant $a = q(x)$ ($\in \mathbb{R}$), $b = \varphi(x, y)$ et $c = q(y)$.

Posons $b = |b|.e^{i\theta}$. En remplaçant λ par $t\, e^{-i\theta}$ dans l'inégalité précédente on obtient pour tout t :

$\varphi(te^{-i\theta}x + y, te^{-i\theta}x + y) = t^2a + 2t.|b| + c \geq 0$.

Si a est non nul on a un polynôme du second degré toujours positif ou nul et on en déduit comme précédemment l'inégalité demandée.

Si x et y sont colinéaires non nuls il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_0 x + y = 0$ soit $\varphi(t_0e^{-i\theta}x + y, t_0e^{-i\theta}x + y) = 0$ avec $t_0 = \lambda_0\, e^{i\theta}$. Le discriminant du trinôme $t^2a + 2t.|b| + c$ est nul, soit $|b|^2 = $ ac et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité.

(ii) Supposons φ sesquilinéaire hermitienne définie positive et posons $N(x) = (q(x))^{1/2}$ pour tout de E. On a $N(x) = 0$ ssi $x = 0$ et $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$. Il reste à prouver l'inégalité triangulaire : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. Elle équivaut à $q(x + y) \leq [(q(x))^{1/2} + q(y)^{1/2}]^2$ soit à $q(x) + q(y) + 2\,\mathrm{Re}\varphi(x, y) \leq q(x) + q(y) + 2[q(x)q(y)]^{1/2}$ ou encore à : $\mathrm{Re}\varphi(x, y) \leq [q(x)q(y)]^{1/2}$ et cette dernière inégalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisque :

$$\mathrm{Re}\varphi(x, y) \leq |\varphi(x, y)|.$$

Avec les notations précédentes si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité et si $a \neq 0$, (**) montre que

$\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) = 0$ pour $\lambda = -\overline{b}/a$ soit $\lambda x + y = 0$. Si $c \neq 0$ on obtient de même une relation $x + \mu y = 0$ et si $a = c = 0$ on a $x = y = 0$. Dans tous les cas x et y sont liés.

Une forme bilinéaire symétrique 5ou sesquilinéaire hermitienne) définie positive s'appelle un <u>*produit scalaire*</u> de E.

Un espace vectoriel réel E muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive s'appelle <u>*espace préhilbertien réel*</u> ; un espace vectoriel complexe muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive E s'appelle <u>*espace préhilbertien complexe*</u>. Si ces espaces sont de dimension finie on les appelle respectivement <u>*espaces euclidien*</u> et <u>*espaces hermitiens*</u>.

La norme associée ($\|x\| = (\varphi(x, x))^{1/2}$ s'appelle <u>*norme euclidienne*</u> dans le premier cas et <u>*norme hermitienne*</u> dans le second.

<u>**Exemples**</u> **: 1°/** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et ω une fonction continue et strictement positive sur l'intérieur de I telle que, pour tout entier n, on ait $\left|\int_I t^n \omega(t)dt\right| < +\infty$. Alors $E = \{f\,;\, I \to \mathbb{C}$ continue sur I / $\int_I |f(t)|^2 \omega(t)dt < +\infty$ } est un espace vectoriel et l'application $(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)\omega(t)dt$ est un produit scalaire dans E. Ainsi E muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien complexe.
(Le fait que E soit un espace vectoriel résulte de l'inégalité $|f + g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$).

2°/ Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites (x_n) complexes telles que $\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application $((x_n), (y_n)) \to \sum_{n\geq 0} x_n.\overline{y_n}$ est un produit scalaire. $l^2(\mathbb{N})$ munit de ce produit scalaire est donc un espace préhilbertien complexe.

3°/ $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces euclidiens et hermitiens respectivement, munis des produits scalaires canoniques $((x_i), (y_i)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$ et $((x_i), (y_i)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i.\overline{y_i}$.