2.2 Dégénérescence

Soit φ une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne. L'application Φ de E dans le dual E^* de E qui à $y \in E$ associe la forme linéaire $\varphi(. , y)$ est linéaire si $K = \mathbb{R}$ et semi-linéaire si $K = \mathbb{C}$.

Définition : on dit que φ est *dégénérée* ssi l'application Φ est non injective.

Le noyau de Φ est appelé *noyau de* φ ; on a donc :

$$\text{Ker } \Phi = \text{Ker } \varphi = \{y \in E \ / \ \forall \ x \in E : \varphi(x, y) = 0\} = E^{\perp}.$$

et : φ dégénérée $\Leftrightarrow$ Ker $\varphi \neq \{0\}$.

Si E est muni d'une base $B = (e_i)$ et si E^* est muni de la base duale de B la matrice de Φ dans ces bases est Ω, matrice de φ dans la base B. Si on identifie E à $\mathbf{K}^n$ grâce à cette base on a :

Ker $\varphi = \{Y \in \mathbb{R}^n \ / \ \Omega Y = 0\}$ = Ker Ω (cas réel) et Ker $\varphi = \{Y \in \mathbb{C}^n \ / \ \Omega\overline{Y} = 0\}$ = Ker $\overline{\Omega}$ (cas complexe) et :

φ non dégénérée $\Leftrightarrow$ Dét $\Omega \neq 0$.

Le *rang de* φ est celui de Φ et c'est donc aussi le rang de la matrice Ω.

Remarque : puisque E est de dimension finie, si φ est non dégénérée l'application Φ est un isomorphisme de E dans E^*.

Propriétés : Soit φ une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne.

(i) On a Ker $\varphi \subset C(\varphi)$ (cône isotrope de φ). En particulier on a :

φ définie $\Rightarrow$ φ non dégénérée;

(ii) Si φ est positive on a : Ker $\varphi = C(\varphi)$. Dans ce cas on a donc :

φ définie $\Leftrightarrow$ φ non dégénérée.

Démonstration :

(i) Si $x \in$ Ker φ on a $\varphi(x, y) = 0$ pour tout y de E. En prenant $y = x$ on a $\varphi(x, x) = 0$ soit $x \in C(\varphi)$. Donc Ker $\varphi \subset C(\varphi)$.

(ii) Si φ est positive $x \in C(\varphi)$, pour tout y de E on a $|\varphi(x, y)| \leq (q(x)q(y))^{1/2}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, soit $\varphi(x, y) = 0$ pour tout y de E donc $x \in$ Ker φ et Ker $\varphi = C(\varphi)$ d'après (i).

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que E se décompose en somme directe orthogonal de deux sous-espaces vectoriels :

Théorème : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et φ une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La restriction de φ à $F \times F$ est non dégénérée;

(ii) $E = F \oplus F^{\perp}$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : soit $z \in E$; l'application $x \mapsto \varphi(x, z)$ est une forme linéaire sur F; comme $\varphi / F \times F$ est non dégénérée, l'application Φ de F dans F^* est un isomorphisme donc il existe $y_0 \in F$ unique tel que $\varphi(x, z) = \varphi(x, y_0)$ pour tout x de F, soit : $\varphi(x, z - y_0) = 0$. On a donc $z - y_0 \in F^{\perp}$ et $z = y_0 + (z - y_0)$ ce qui prouve que $E = F + F^{\perp}$.

Enfin $F \cap F^{\perp}$ = Ker $\varphi / F \times F = \{0\}$ par hypothèse donc $E = F \oplus F^{\perp}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : résulte de $F \cap F^{\perp}$ = Ker $\varphi / F \times F$.

Remarque : avec les hypothèses du théorème précédent on a : dim $F^{\perp} = n$ - dim F. Comme on a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$ on en déduit que $F^{\perp\perp} = F$.