2.3 Réduction des formes quadratiques

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel de dimension finie.

2.3.1 Cas général

<u>Théorème</u> : soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2 ou sesquilinéaire hermitienne avec $\mathbf{K} = \mathbb{C}$. Alors il existe une base de E orthogonale pour φ.

<u>Démonstration</u> : si $n = 1$ le résultat est évident. Supposons le vrai pour n et soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Si $\varphi(x, x) = 0$ pour tout x de E alors $\varphi = 0$ et toute base est orthogonale. Sinon soit x de E tel que $\varphi(x, x) \neq 0$. La restriction de φ à $\mathbf{K}.x$ est non dégénérée et donc $E = \mathbf{K}x \oplus F$ avec $F = (\mathbf{K}\,x)^{\perp}$ d'après le théorème du 2.2. D'après l'hypothèse de récurrence il existe une base $B = (e_1, \ldots , e_n)$ de F qui est orthogonale pour la restriction de φ à $F{\times}F$. Alors $(x, e_1, \ldots , e_n)$ est une base de E orthogonale pour φ.

2.3.2 Cas des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

<u>Théorème</u> : soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}$ et q sa forme quadratique associée.

(i) Il existe une base B de E dans laquelle, si $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ dans cette base, on ait :

$$\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} \lambda_k x_k^2 \quad \text{où les réels } \lambda_k \text{ sont} > 0;$$

(ii) Si $q = r - p$ dans l'écriture précédente, le couple (p, q) ne dépend pas de la base orthogonale et $r = p + q$ est le rang de φ; si $r < n$, les vecteurs isotropes $e_{r+1}, \ldots , e_n$ de B forment une base du noyau de φ;

(iii) Il existe une base orthogonale (appelée *base réduite*) dans laquelle φ s'écrit :

$$\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_k^2 .$$

<u>Démonstration</u> :

(i) dans une base $(e_1, \ldots , e_n)$ de E orthogonale pour φ (théorème de 2.3.1) telle que $\varphi(e_j, e_j) > 0$ pour $j \in \{1, \ldots , p\}$, $\varphi(e_j, e_j) < 0$ pour $j \in \{p+1, \ldots , r\}$ et $\varphi(e_j, e_j) = 0$ pour $j > r$ on a : $\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} \lambda_k x_k^2$.

(ii) soit p' la plus grande des dimensions des sous-espaces vectoriels F tels que la restriction de φ à $F{\times}F$ est définie positive. Comme la restriction de φ à $< e_1, \ldots , e_p >$ est définie positive on a $p \leq p'$.

Soit H de dimension p' l'un des sous-espaces vectoriels pour lequel la restriction de φ à H est définie positive. Soit $G = < e_{p+1}, \ldots , e_n >$; on a $\varphi(x, x) \leq 0$ pour tout x de G donc $H \cap G = \{0\}$ et la somme $H + G$ est directe dans E soit : $p' + (n - p) \leq n$ ou $p' \leq p$. Par conséquent $p = p'$.

De même si q' est la plus grande des dimensions des sous-espaces vectoriels V tels que la restriction de φ à $V{\times}V$ est définie négative on montre que $q = r - p$ est égal à q'. Le couple (p, q) ne dépend donc pas de la base choisie.

D'autre part dans la base définie au (i) la matrice de φ est $M = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix}$,

$D_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_{p+1} & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda_r \end{pmatrix}$ donc le rang de φ, égal au rang de M, est égal à $r = p + q$ et si $r < n$ le noyau de φ admet $(e_{r+1}, \ldots , e_n)$ pour base.

la base $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n \right)$ est orthogonale pour φ et dans cette base on a

$\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_k^2$.

2.3.3 Cas des formes hermitiennes

Théorème : soit φ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{C}$ et q sa forme quadratique hermitienne associée.

(i) Il existe une base B de E dans laquelle, si $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans cette base, on ait :

$$\varphi(x, x) = q(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k |x_k|^2 - \sum_{k=p+1}^{r} \lambda_k |x_k|^2 \quad \text{où les réels } \lambda_k \text{ sont } > 0;$$

(ii) Si $q = r - p$ dans l'écriture précédente, le couple (p, q) ne dépend pas de la base orthogonale et $r = p + q$ est le rang de φ; si $r < n$, les vecteurs isotropes $e_{r+1}, \dots, e_n$ de B forment une base du noyau de φ;

(iii) Il existe une base orthogonale (appelée *base réduite*) dans laquelle φ s'écrit :

$$\varphi(x, x) = q(x) = \sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 - \sum_{k=p+1}^{r} |x_k|^2 .$$

Le théorème se démontre de la même façon que le précédent.

Remarques : dans les deux théorèmes précédents :

Les bases B et les bases réduites sont des bases orthogonales pour φ ;

Dans 2.3.2 ou 2.3.3 le couple (p, q) s'appelle *signature* de φ (ou de q forme quadratique associée à φ). φ est *non dégénérée* ssi $p + q = n$; φ est *positive* ssi la signature de φ est $(p, 0)$; φ définit un produit scalaire ssi la signature de φ est $(n, 0)$;

On peut obtenir la décomposition précédente par la *méthode de Gauss* (voir exercice suivant).

Exercice 17

1°/ Décomposer les formes quadratiques de $\mathbb{R}^3$ suivantes en somme de carrés de formes linéaires indépendantes par la méthode de Gauss; en déduire leur rang et leur signature :

a/ $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$;

b/ $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3(x_1 \cos\lambda + x_2 \sin\lambda)$ (λ réel donné);

c/ $q(x) = x_1x_2 + 2\, x_2x_3 + 3x_3x_1$.

2°/ Mêmes questions avec les formes quadratiques hermitiennes :

a/ $q(x) = x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_1}$ (dans $\mathbb{C}^2$);

b/ $q(x) = x_1\overline{x_1} + ix_1\overline{x_2} - ix_2\overline{x_1} + i\sqrt{2}x_2\overline{x_3} - i\sqrt{2}x_3\overline{x_2} + x_3\overline{x_3}$.

2.3.4 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 18 : procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit (E, φ) un espace euclidien ou hermitien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ orthogonale pour φ vérifiant la condition (*) : $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $k \geq 1$, les f_k sont donnés par $f_k = \alpha_k \left[e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varphi(e_k ; f_j)}{\|f_j\|^2} f_j \right]$ où α_k est un scalaire non nul. De plus on peut prendre $(f_1, \dots, f_n)$ orthonormé.

Il existe enfin une unique base $(f_1, \dots, f_k)$ orthonormée, vérifiant (*), et la condition supplémentaire : $\varphi(e_k, f_k) > 0$ pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 19 : polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et ω une fonction continue et strictement positive sur l'intérieur de *I* telle que, pour tout entier *n*, on ait $\left|\int_I t^n \omega(t)dt\right| < +\infty$.

1°/ Montrer que dans l'espace vectoriel $E = \{f \in C(I, \mathbb{R}) \,/\, \int_I |f(t)|^2 \omega(t)dt < +\infty\}$, l'application $(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)\omega(t)dt$ est un produit scalaire.

2°/ Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes unitaires de degré *n* tels que, pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à *n*.

Montrer que et que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x^n ; P_i)}{\|P_i\|^2} P_i$ et que pour tout $n \geq 3$ il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $P_n = (x - \alpha_n)P_{n-1} - \beta_n P_{n-2}$.

3°/ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, P_n possède *n* racines réelles distinctes, intérieures à *I*.

4°/ **<u>Application</u>** : si $\omega = 1$ et $I = [-1 ; 1]$ on obtient la suite des polynômes P_n de Legendre et on a $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$.

Exercice 20

Soit *M* une matrice symétrique réelle de type $n \times n$. Montrer que *M* définit un produit scalaire ssi les mineurs principaux sont strictement positifs (raisonner par récurrence sur *n*).

Exercice 21 : décomposition QR d'une matrice

Soit *A* une matrice carrée inversible à coefficients réels. Montrer qu'il existe un couple unique (Q, R) de matrices réelles avec *Q* orthogonale, *R* triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 tel que $A = QR$.

Montrer que si *A* est sous la forme *QR*, on peut résoudre facilement le système linéaire $AX = B$ (avec $B \in \mathbb{R}^n$).

Exercice 22

1°/ Soit *M* une matrice symétrique réelle définissant un produit scalaire. Prouver qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 telle que $M = {}^tTT$ (*décomposition de Choleski*) (utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt).

Si *M* est symétrique et positive (i.e. ${}^tXMX \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$) montrer que $\text{dét}(M) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

2°/ $M = (a_{i,j})$ désignant une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$ montrer que :

$$|\text{dét}(M)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2\right)} \qquad (\textit{inégalité d'Hadamard}).$$