2.4 Adjoint d'un endomorphisme

2.4.1 Définitions et propriétés

Soit E un espace euclidien ou hermitien (donc de dimension finie) et notons < ; > son produit scalaire. Soit u un endomorphisme de E.

Pour $y \in E$ <u>fixé</u> l'application qui à $x \in E$ associe $<u(x), y>$ est un forme linéaire de E. L'application Φ de E dans le dual E^* de E (voir 2.2) étant un isomorphisme il existe $z \in E$ tel que pour tout x de E on ait : $<u(x), y> = <x, z>$. On voit facilement que z est unique. On pose $z = u^*(y)$. L'application u^* de E dans E ainsi définie est un endomorphisme de E :

<u>Théorème et définition</u> : Soit E un espace euclidien ou hermitien et u un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme de u, noté u^* tel que :

$$\forall\ (x, y) \in E^2 \ :\ <u(x), y> = <x, u^*(y)>.$$

u^* est appelé *<u>l'adjoint de u</u>*.

On démontre facilement les propriétés suivantes :

<u>Propriétés</u> : Dans les conditions précédentes on a pour tout $v \in L(E)$ et $\alpha \in \mathbf{K}$:

(i) $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$; $(u)^{**} = u$; $(u + v)^* = u^* + v^*$; $(\alpha u)^* = \alpha u^*$ (et $\overline{\alpha}\, u^*$ dans le cas hermitien) ; $(uv)^* = v^*u^*$;

(ii) Si u est inversible, u^* aussi et : $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$;

(iii) $\mathrm{Ker}\ u^* = (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\ u^* = (\mathrm{Ker}\ u)^{\perp}$;

(iv) Un sous-espace vectoriel F est stable par u ssi $F^{\perp}$ est stable par u^* ;

2.4.2 Traduction matricielle

Soit $B = (e_i)$ $(1 \le i \le n)$ une base de E, $\Omega = (<e_i, e_j>)_{i,j}$ la matrice de < ; > dans cette base et M la matrice de u dans la base B. Si M' est la matrice de u^* et X et Y sont les coordonnées de x et y de E dans la base B, la traduction matricielle de $<u(x), y> = <x, u^*(y)>$ est (dans le cas hermitien) :

$${}^t(MX)\Omega\overline{Y} = {}^tX\Omega\overline{M'Y}) \quad \text{soit} \quad : {}^tX\,{}^tM\Omega\overline{Y} = X\Omega\overline{M}'\overline{Y}$$ pour tout X et Y de $\mathbf{K}^n$. Soit :

$${}^tM\Omega = \Omega\overline{M}$$

La matrice M'de u^* dans la base B est donc :

$M' = \mathrm{Mat}(u^*, B) = \Omega^{1}\,{}^tM\Omega$ dans le cas euclidien et $\overline{M'} = \Omega^{1}\,{}^tM\Omega$ (dans le cas hermitien) avec $\Omega = (<e_i, e_j>)_{i,j}$.

<u>Si la base B est orthonormé</u> on a $\Omega = \mathrm{I}_n$ et :

$$M' = {}^tM \quad \text{(cas euclidien) ou} \quad M' = {}^t\overline{M} \quad \text{(cas hermitien).}$$

Remarques : on peut retrouver le résultat précédent très simplement : si $M = (\alpha_{i,j})$ est la matrice de u et $M' = (\beta_{i,j})$ celle de u^* dans la base orthonormée B, on a $\beta_{i,j} = <u^*(e_j); e_i> = <e_j; u(e_i)> = < u(e_i); e_j>$ dans le cas euclidien (resp. $\overline{< u(e_i); e_j >}$ dans le cas hermitien), ce qui donne $\beta_{i,j} = \beta_{j,i}$ (resp. $\beta_{i,j} = \overline{\beta_{j,i}}$).