2.5 Endomorphismes autoadjoints

2.5.1 Définition

E est un espace euclidient ou hermitien.

<u>Définition</u> : un endomorphisme u est <u>*autoadjoint*</u> ssi $u = u^*$.

Dans le cas euclidien on dit aussi <u>*symétrique*</u>; dans le cas hermitien on dit aussi <u>*hermitien*</u>.

2.5.2 Traduction matricielle

Soit M la matrice d'un endomorphisme u de E et $\Omega = <e_i; e_j>$ la matrice de $< ; >$ dans une base B. Le fait que u est autoadjoint se traduit matriciellement (dans le cas hermitien) par $\overline{M} = \Omega^{-1}\,{}^tM\Omega$ d'après 2.4.2 :

> u autoadjoint $\Leftrightarrow$ $M = \Omega^{-1}\,{}^tM\Omega$ (cas eulidien) ou $\overline{M} = \Omega^{-1}\,{}^tM\Omega$ (dans le cas hermitien).
>
> <u>*Si la base B est orthonormé*</u> on a :
>
> u autoadjoint $\Leftrightarrow$ $M = {}^tM$ (cas eulidien) ou $\overline{M} = {}^tM$ (dans le cas hermitien).

Remarque : tout ce qu'on a dit depuis le début de 2.4 est valable en remplaçant le produit scalaire par une forme φ bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne de E *non dégénérée*.

2.5.3 Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints

L'exercice suivant établit que tout endomorphisme autoadjoint se diagonalise dans une base orthonormée.

Exercice 23

Soit E un <u>*espace vectoriel euclidien ou hermitien*</u> (i.e. φ est un produit scalaire). Soit u un endomorphisme autoadjoint.

1°/ Montrer que les valeurs propres de u sont réelles.

2°/ Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u montrer que les espaces propres correspondants sont orthogonaux. En déduire que E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.

3°/ Montrer que u se diagonalise dans une base orthonormée en un matrice réelle.

Enoncer la propriété correspondante des <u>*matrices symétriques*</u> ($M = {}^tM$) ou <u>*matrice hermitiennes*</u> ($\overline{M} = {}^tM$).

Les exercices suivants donnent des exemples d'applications :

Exercice 24

Soit u un endomorphisme de E (espace euclidien ou hermitien). Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que le système $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonal

(considérer u^*u).

Exercice 25 : autre façon de montrer qu'un endomorphisme symétrique se diagonalise

Soit M une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n$ et q la forme quadratique associée (i.e. la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ de matrice M). Que dire de $\lambda = \operatorname{Sup}_{\|x\|=1} q(x)$?

En considérant la forme quadratique $q_1(x) = \lambda\|x\|^2 - q(x)$, montrer que M a une valeur propre réelle. Conclure que M est diagonalisable.

Exercice 26

Soient φ un produit scalaire d'un espace euclidien ou hermitien et ω une forme bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne. Montrer qu'il existe une base de E orthonormée pour φ et orthogonale pour ω.

Exercice 27

Soient A et B deux matrices réelles symétriques d'ordre n telles que $A^5 = B^5$. Montrer qu'alors $A = B$.

Exercice 28

Soit E hermitien de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle u admet une matrice triangulaire supérieure (utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

En déduire que pour tout endomorphisme u autoadjoint il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale réelle.