2.6 Endomorphismes orthogonaux et unitaires

2.6.1 Définitions et propriétés

Définition : Soit E un espace euclidien ou hermitien et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall\ (x, y) \in E^2\ :\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

On dit que u est *orthogonal* (dans le cas euclidien) et *unitaire* dans le cas hermitien.

Un tel endomorphisme est aussi appelé *isométrie* de E. Il conserve en effet la distance associée à la norme euclidienne : $\forall\ (x, y) \in E^2\ :\ \|x - y\| = \|u(x) - u(y)\|$.

2.6.2 Caractérisations

Théorème : les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est orthogonal (ou unitaire);

(ii) u est linéaire et conserve la norme : $\forall\ x \in E\ :\ \|u(x)\| = \|x\|$;

(iii) u est bijective et : $\forall\ (x, y) \in E^2\ :\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$;

(iv) u est un automorphisme de E vérifiant $u^{-1} = u^*$.

Démonstration du théorème :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : clair;

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : le fait que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout (x, y) de E^2 résulte de la linéarité de u et de l'identité :

$$4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \text{ (cas hermitien).}$$

D'autre part si $u(x) = 0$ alors pour tout y de E on a $\langle u(x), u(y)\rangle = 0$ soit $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout y de E et le produit scalaire étant non dégénéré cela implique $x = 0$; u est injective donc bijective.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : montrons d'abord que u est linéaire. Soient x, y et z de E. u étant bijective il existe $t \in E$ tel que $z = u(t)$. On a : $\langle u(x + y) - u(x) - u(y), z\rangle = \langle u(x + y) - u(x) - u(y), u(t)\rangle = \langle u(x + y), u(t)\rangle - \langle u(x), u(t)\rangle - \langle u(y), u(t)\rangle =$

$\langle x + y, t\rangle - \langle x, t\rangle - \langle y, t\rangle = 0$. Le produit scalaire étant non dégénéré on en conclut que $u(x + y) - u(x) - u(y) = 0$. On montre de même que $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour tout λ de $\mathbf{K}$.

D'autre part pour tous x et y de E on a $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^*u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ et comme précédemment on en déduit que $u^*u(y) = y$ soit $u^*u = \mathrm{Id}_E$. On a donc $u^{-1} = u^*$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : c'est clair puisque pour tous x et y de E : $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^*u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

2.6.3 Traduction matricielle

u est un endomorphisme unitaire ssi $u^{-1} = u^*$; en traduisant matriciellement cette égalité on obtient :

u unitaire $\Leftrightarrow$ $M^{-1} = \Omega^{1}\,{}^tM\Omega$ ou $\overline{M}^{-1} = \Omega^{1}\,{}^tM\Omega$ (dans le cas autoadjoint)

Si la base B est orthonormé pour φ (i.e. si $\Omega = \mathrm{I}_n$) on a :

u unitaire $\Leftrightarrow$ $M^{-1} = {}^tM$ ou $\overline{M}^{-1} = {}^tM$

Autrement dit : dans un espace euclidien un endomorphisme u est une isométrie sii sa matrice dans un *base orthonormée* est symétrique ($M^{-1} = {}^tM$), et dans un espace hermitien un endomorphisme u est une isométrie sii sa matrice dans un *base orthonormée* est unitaire ($\overline{M}^{-1} = {}^tM$).

Rappelons que : M est symétrique $\Leftrightarrow$ ${}^tM.M = \mathrm{I}_n$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $M.{}^tM = \mathrm{I}_n$ $\Leftrightarrow$ les colonnes de M forment un système orthonormé de $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire canonique) et :

M est unitaire $\Leftrightarrow$ ${}^tM.\overline{M} = \mathrm{I}_n$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\overline{M}.{}^tM$. ${}^tM = \mathrm{I}_n$ $\Leftrightarrow$ les colonnes de M forment un système orthonormé de $\mathbb{C}^n$ (muni de son produit scalaire canonique)