2.7 Endomorphismes normaux

2.7.1 Définition

Dans E espace euclidien ou hermitien, un endomorphisme u est *normal* ssi $uu^* = u^*u$.

Exemples : tout endomorphisme autoadjoint ou unitaire est normal.

2.7.2 Diagonalisation des endomorphismes normaux

L'exercice suivant établit que tout endomorphisme normal d'un espace hermitien se diagonalise dans une base orthonormée :

Exercice 29

Soit E un espace vectoriel *hermitien*. Soit u un endomorphisme normal.

1°/ Montrer que pour tout x de E on a : $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ puis que pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{C}\times E$:

$$\|u(x) - \lambda x\| = \|u^*(x)| - \overline{\lambda}\, x\|.$$

2°/ Montrer que Ker u = Ker u^* puis que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de u alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de u^* et tout vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est vecteur propre de u^* associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.

3°/ Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, les sous-espaces propres correspondants sont orthogonaux.

4°/ Montrer que u se diagonalise dans une base orthonormée.

Exercice 30

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien. Montrer que u est normal ssi il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Exercice 31

Soit u un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec sur la diagonale 1, -1 ou $C_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 est connexe par arcs dans $L(E)$.