Exercices complémentaires

I ***Norme d'un endomorphisme ou d'une matrice.***

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$. Soit u un endomorphisme de E. On pose :

$$\|u\| = \underset{\|x\|\leq 1}{Sup}\|u(x)\|.$$

1°/ Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $L(E)$. On dit que cette norme est induite par celle de E.

Si M est une matrice sa norme est celle de l'application linéaire canoniquement associée à M ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ étant munis d'une norme $\|.\|$).

Montrer que pour tout x de E : $\|u(x)\| \leq \|u\|.\|x\|$.

2°/ Montrer que pour tout endomorphisme u de E :

(i) $\|u\| = \underset{\|x\|=1}{Sup}\|u(x)\| = \underset{x\neq 0}{Sup}\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \mathrm{Inf}\{ \alpha \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in E : \|u(x)\| \leq \alpha\|x\| \}$;

(ii) $\|uv\| \leq \|u\|.\|v\|$;

(iii) $\|\mathrm{Id}_E\| = 1$;

(iv) Si E est de dimension finie il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|u\| = \|u(x)\|$.

3°/ Calculer la norme d'une matrice M si on prend pour norme de $\mathbb{C}^n$ les normes $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$ et $\|x\|_\infty = \mathrm{Max}\{|x_k| \ / \ 1 \leq k \leq n\}$.

4°/ Soit u un endomorphisme de E, espace euclidien ou hermitien de dimension n, muni de sa norme euclidienne ou hermitienne. Montrer que $\|u\|^2 = \mathrm{Max}\{$valeurs propres de $uu^*\}$.

Que vaut $\|u\|$ si u est hermitien ?

5°/ Montrer que $\|M\|_s = Tr(M\,{}^t\overline{M}) = \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$ définit une norme de $M_n(\mathbb{C})$ (appelée « norme de Shur »).

(i) Montrer que pour toutes matrices M et N : $\|MN\|_s \leq \|M\|_s.\|N\|_s$. La norme $\|.\|_s$ de $M_n(\mathbb{C})$ dérive-t-elle d'une norme de $\mathbb{C}^n$?

(ii) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M Montrer que $\|M\|_s^2 \geq \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2$. Quel sont les cas d'égalité ?

II Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que les valeurs propres de $P(u)$ sont $\{P(\lambda) \ / \ \lambda$ valeur propre de $u\}$.

III ***Matrices de Gram***

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n vecteurs d'un espace euclidien ou hermitien E. On appelle *matrice de Gram* des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ la matrice $M = ((x_i; x_j))_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$; $\mathrm{Gram}(x_i) = \mathrm{dét}M$ et appelé *déterminant de Gram* des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1°/ Montrer que le système $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre ssi $\mathrm{Gram}(x_i) \neq 0$. Si E est un espace euclidien on a : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre ssi $\mathrm{Gram}(x_i) > 0$.

2°/ Dans le cas où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un système libre montrer que :

$$\mathrm{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1^{2} \times \mathrm{Gram}(x_2, \ldots, x_n)$$ où d_1 est la distance de x_1 au sous-espace vectoriel engendré par $x_2, \ldots, x_n$.

En déduire que $\mathrm{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \|x_1\|.\|x_2\|\ldots\|x_n\|$.

Quels sont les cas d'égalité ? (Ellipses t. 2 p. 144; *G*-5)

$\boxed{\textbf{IV}}$ Soit E un espace vectoriel sur c et G un sous-groupe fini de $L(E)$. Montrer que les éléments de G sont diagonalisables.

$\boxed{\textbf{V}}$ Soit E un espace vectoriel sur c de dimension $n \geq 2$. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ des endomorphismes de E tels que :

$$f_i o f_i = -\mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f_i o f_j + f_j o f_i = O_E \text{ si } i \text{ ¹ } j.$$

Déterminer $\mathrm{Tr}(f_i)$ et $\mathrm{Sp}(f_i)$.

$\boxed{\textbf{VI}}$ Soit E un espace hermitien et f un automorphisme de E.

1°/ Montrer que $j = f\, f^*$ est hermitien, défini, positif (c'est-à-dire que la forme hermitienne associée $(x;\, f\, f^*(y))$ est définie positive).

2°/ Montrer que pour tout endomorphisme j hermitien défini positif il existe un endomorphisme y hermitien défini positif tel que $y^2 = j$.

3°/ Montrer que pour tout endomorphisme f de E il existe un automorphisme unitaire a et un automorphisme hermitien défini positif y tels que $f = a$

(à rapprocher de l'écriture re^{iq} d'un nombre complexe).

4°/ Enoncer le résultat pour une matrice A de M_n(c).