E désigne un espace de Banach sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Idee générale du calcul différentiel : écrire l'accroissement d'une fonction sous la forme :

accroissement de $f =$ (terme linéaire de l'accroissement) + termes "petits".

Au voisinage de a la fonction f se comporte comme une application affine $x \mapsto f(a) + u(x - a)$ où u est une application linéaire.

1. Applications différentiables

1.1 Définitions

Définition 1 : soit f une application d'un ouvert U de E dans un espace de Banach F et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a si f est continue en a et s'il existe une application linéaire g_a continue de E dans F telle que pour tout $h \in E$ avec $a + h \in U$ on ait :

$$f(a + h) = f(a) + g_a(h) + o(h).$$

Cela équivaut à dire que la fonction $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - g_a(h)}{\|h\|}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

La définition peut s'écrire : pour tout $h \in E$ avec $a + h \in U$:

$$f(a + h) = f(a) + g_a(h) + \|h\| \cdot \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0.$$

Remarques :

on a : f différentiable en $a \Rightarrow f$ continue en a .

si E est de dimension finie la condition g_a continue est inutile, toute application linéaire de E dans F étant continue.

si $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en a ssi f est dérivable en a et alors $g_a(h) = h \cdot f'(a)$.

dans la définition on peut remplacer la norme par une norme équivalente.

Notons que si g_a existe elle est unique. En effet s'il existe une autre application linéaire γ_a vérifiant les conditions précédentes on a, en posant $\Psi = g_a - \gamma_a$, $\Psi(h) = o(h)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe $r > 0$ tel que $\|h\|_\infty \leq r \Rightarrow \|\Psi(h)\|/\|h\| \leq \varepsilon$. Pour tout x de $E - \{0\}$ de norme ≤ 1 on a alors $\|\Psi(rx)\|/\|rx\| < \varepsilon$, soit $\|\Psi(x)\|/\|x\| < \varepsilon$. On en déduit que $\|\Psi\| \leq \varepsilon$ donc $\|\Psi\| = 0$ et $g_a = \gamma_a$.

Définition 2 : l'unique application linéaire g_a vérifiant les conditions ci-dessus s'appelle différentielle de f en a et se note df_a .

Définition 3 : si f est différentiable en tout point de U on dit que f est différentiable dans U et l'application de U dans $L(E, F)$ qui à $a \in U$ associe df_a s'appelle différentielle de f et se note $df(a)$.

Rappelons que l'espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace de Banach muni de la norme induite par celles de E et F et définie, pour tout u de $L(E, F)$ par :

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

Cas où $E = \mathbb{R}$: $L(\mathbb{R}, F)$ s'identifie à F par l'isomorphisme qui à $h \in F$ associe l'élément $(t \mapsto t \cdot h)$ de $L(\mathbb{R}, F)$. On identifie alors parfois $df(a)$ à l'élément $f'(a)$ de F par cet isomorphisme et on a :

$$f'(a) = df(a)(1) \text{ (élément de } F).$$

On a alors : f est différentiable en a ssi $f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + h \cdot \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, ce qui équivaut à

dire que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ c'est à dire que f est dérivable en a .

Exemples : si f est une fonction linéaire et continue alors elle est différentiable en tout point a et $df = f$.

Exercice 1

1°/ Soit $M_n(n, \mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrée (n, n) . Montrer que l'application f de $M_n(n, \mathbf{K})$ dans $M_n(n, \mathbf{K})$ qui à M associe M^p ($p \in \mathbb{N}^*$) est différentiable en tout point. Quelle est sa différentielle ?

2°/ Soit $GL_n(n, \mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrée (n, n) inversible. Montrer que l'application g de $GL_n(n, \mathbf{K})$ dans $GL_n(n, \mathbf{K})$ qui à M associe M^{-1} est différentiable en tout point et que :

$$\forall (A, H) \in GL_n(n, \mathbf{K})^2 : dg(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$