

1.2 Cas des fonctions à valeurs dans un produit

Supposons que $F = \prod_{k=1}^p F_k$. On peut écrire $f = (f_1, \dots, f_p)$ (f_k est une application de U dans F_k).

Proposition : avec les notations précédentes, f est différentiable en a ssi chaque f_k est différentiable en a et on a alors $df(a) : h \mapsto (df_1(a)(h), \dots, df_p(a)(h))$ ce qui peut s'écrire $df(a) = (df_1(a), \dots, df_p(a))$.

Démonstration : Supposons f différentiable en a . Si p_i désigne la i -ème projection de F dans F_i on a $f_i = p_i \circ f$. f et p_i étant différentiable en a il en est de même de f_i .

Réciproquement supposons que f_k soit différentiable en a pour tout k de $\{1, \dots, p\}$ et posons $\varphi = (df_1(a), \dots, df_p(a))$. On a pour h non nul et $\|h\|$ assez petit :

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \varphi(h)}{\|h\|} = \sum_{k=1}^p u_k \circ \frac{(f_k(a+h) - f_k(a) - df_k(a)(h))}{\|h\|}.$$

(où u_k est l'application de F_k dans $\prod_{k=1}^p F_k$ qui à x associe $(0, \dots, x, \dots, 0)$ où x est situé à la i -ème place). Cette dernière expression tend donc vers 0 quand h tend vers 0, donc f est différentiable en a et $df(a) = (df_1(a), \dots, df_p(a))$.