1.3 Cas des fonctions de plusieurs variables

Définition 1 : si $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on dit que f est une *fonction de plusieurs variables*.

Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ les n fonctions $f_i : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) sont appelées *fonctions partielles au point a*.

Si f est définie dans un ouvert de $\boldsymbol{K}^n$, les fonctions f_i sont définies dans un ouvert de $\boldsymbol{K}$.

Définition 2 : on appelle *j-ième dérivée partielle de f en a* la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction partielle f_j en a_j.

On la note $D_jf(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou $\partial_j f(a)$. C'est un élément de F. Par définition on a donc :

$$D_jf(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,\dots,a_n)}{h}.$$

Définition 3 : si f admet une j-ième dérivée partielle en tout point de U, l'application $D_j : U \to F$ qui à $a \in U$ associe $D_jf(a)$ s'appelle *j-ième dérivée partielle de f* dans U.

On la note aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ ou $\partial_j f$. C'est donc une application de U dans F.

Proposition : si f est différentiable au point a, alors f admet au point a n dérivées partielles $D_jf(a)$ ($1 \le j \le n$) et de plus on a pour tout élément $(h_1, \dots, h_n)$ de $\boldsymbol{K}^n$:

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k .$$

Si on note (dx_k) ($1 \le k \le n$) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ la formule précédente peut s'écrire :

$$df(a) = \sum_{k=1}^{n} dx_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) .$$

Démonstration : (e_i) désignant la base canonique de $\boldsymbol{K}^n$ on a pour $|h|$ suffisamment petit et $1 \le j \le n$:

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(a) + df(a)(he_j) + o(h).$$

Soit $f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(a) + h.df(a)(e_j) + o(h)$.

Il s'ensuit que f admet une dérivée j-ième dérivée partielle en a et $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a)(e_j)$. Comme

$df_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k .df(a)(e_k)$ on obtient la formule annoncée.

Remarques :

La réciproque est fausse. Par exemple si $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et f définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Comme $f(x, x) = 1/2$ pour $x \neq 0$ f n'est pas continue en (0, 0) donc pas différentiable en (0; 0); pourtant f admet des dérivées partielles nulles en 0 (les deux fonctions partielles en (0; 0) étant nulles).

Si (e_k) ($1 \le k \le n$) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $df(a)(e_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$: on a alors $f = (f_1, \dots, f_p)$ où les fonctions f_k de U dans $\mathbb{R}$ sont différentiables en a (d'après 1.2) et $df(a) = (df_1(a), \dots, df_p(a))$. La matrice de $d(f)(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ est donc d'après la deuxième remarque précédente : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$. Elle est appelée *matrice jacobienne* de f en a et se note $J_f(a)$.