

1.4 Cas d'une fonction de la variable complexe

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de U dans $\mathbb{C}$.

Appliquons la définition de la différentiabilité avec $K = \mathbb{C}$: f est différentiable en $z_0 \in U$ ssi il existe une fonction $\mathbb{C}$ -linéaire L telle que $f(z_0 + w) = f(z_0) + L(w) + o(|w|)$. Comme L est $\mathbb{C}$ -linéaire on a $L(w) = wL(1)$. En posant

$L(1) = l \in \mathbb{C}$, on obtient $f(z_0 + w) = f(z_0) + l.w + o(|w|)$. Cela est équivalent à dire que $\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$ tend vers l quand w tend vers 0. Donc :

f est $\mathbb{C}$ -différentiable au point $z_0 \in U$ ssi le quotient $\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}$ a une limite finie quand w (complexe) tend vers 0. On note $f'(z_0)$ cette limite et on dit que f est *holomorphe* au point z_0 .

Exercice 2

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. La fonction f s'identifie à la fonction F définie par $F(x, y) = f(x + iy)$. Posons $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, donc $f = P + iQ$.

1°/ Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$;

(ii) F est différentiable au point (x_0, y_0) et de plus $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$

(conditions de Cauchy-Riemann).

Calculer alors le jacobien de F en (x_0, y_0) et son déterminant.

2°/ Soit f la fonction définie par $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, la série étant convergente pour $|z| < R$ ($R > 0$). Montrer que f est holomorphe dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ et pour tout z de D , $f'(z) = \sum_{k \geq 1} k a_k z^{k-1}$.

Une fonction f définie dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ est *analytique* dans D si pour tout z_0 de D il existe un disque de centre z_0 de rayon $r > 0$ inclus dans D dans lequel on ait $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$. Le 2°/ de l'exercice précédent montre que toute fonction analytique dans D est holomorphe dans D . La question suivante donne une réciproque si f est de plus C^1 .

3°/ Montrer que toute fonction holomorphe de classe C^1 dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique (donc indéfiniment dérivable dans D d'après 2°/). De plus $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ et si $U = \mathbb{C}$, le rayon de convergence de cette série est égale à $+\infty$. La situation est donc tout à fait différente de celle de $\mathbb{R}$.

4°/ Dédire du 3/ le théorème d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.