1.5 Différentielle d'une fonction composée

Soient E, F et G trois espaces vectoriels et deux applications f et g, $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ (U et V ouverts de E et F). Soit $a \in U$; on suppose que $f(a) \in V$.

Théorème : avec les notations précédentes, si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \quad \text{(égalité dans } L(E, G)\text{).}$$

Remarquons que la fonction $g \circ f$ est définie dans un voisinage de a (f étant continue en a puisque différentiable, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a, donc il existe un ouvert U' de E tel que $U' \subset U \cap f^{-1}(V)$ et $g \circ f$ est définie sur U').

Démonstration : posons $b = f(a)$. Par hypothèses il existe une fonction α telle que pour tout $h \in E$ avec $a + h \in U$:

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\alpha(h) = \alpha(0) = 0. \qquad (1)$$

De même il existe une fonction β telle que pour tout $l \in F$ avec $b + l \in V$:

$$g(b + l) = g(b) + dg(b)(l) + \|l\|.\beta(l) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\beta(h) = \beta(0) = 0. \qquad (2)$$

$df(a)$ étant continue, on a $\lim_{h\to 0} df(a)(h) = 0$, donc pour $\|h\|$ suffisamment petit on a $df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h) \in V$, et d'après (2) on peut alors écrire :

$$g(f(a+h)) = g(b) + dg(b)(df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h)) + \| df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h) \|.\beta(df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h)).$$

Soit : $\quad g(f(a+h)) = g(b) + dg(b)(df(a)(h)) + R(h), \qquad (3)$

avec $R(h) = \|h\|.dg(b)(\alpha(h)) + \| df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h) \|.\beta(df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h))$.

On a : $\| df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h) \| \le \| df(a)\|.\|h\| + \|h\|.\|\alpha(h) \|$, d'où :

$$\|R(h)\| \le \|h\|.[\| dg(b)(\alpha(h))\| + \| df(a)\| + \|\alpha(h) \| \,.\, \|\beta(df(a)(h) + \|h\|.\alpha(h))\|]$$

Les fonction α, β, $dg(b)$ et $df(a)$ tendant vers 0 quand h tend vers 0, on en déduit que $R(h) = o(h)$, d'après (3), que $g \circ f$ est différentiable en a et que $d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a)$ (qui est une application linéaire continue comme composée de deux applications linéaires continues).

Exemple : soit f différentiable dans un ouvert U, a et b deux points de U tels que le segment $[ab] = \{(1 - t)a + tb \,/\, t \in [0; 1]\}$ soit inclus dans U. Soit φ l'application $t \mapsto f((1 - t)a + tb)$ de $[0; 1]$ dans F. U étant ouvert il est clair qu'elle est définie sur un intervalle ouvert contenant $[0; 1]$. Pour tout t de $[0; 1]$ l'application $\gamma : t \mapsto (1 - t)a + tb = t(b - a) + a$ est différentiable et $\forall\, h \in \mathbb{R}$ $d\gamma(t)(h) = h(b - a)$ (car $t \mapsto t(b - a)$ est linéaire donc égale à sa différentielle). D'après le théorème précédent φ est différentiable pour tout t de $[0; 1]$ et :

$d\varphi(t)(h) = df((1 - t)a + tb)(h(b - a)) = hdf((1 - t)a + tb)(b - a)$, ou $\varphi'(t) = df((1 - t)a + tb)(b - a)$ (élément de F).

Cas où $E = \mathbb{R}$: en prenant l'image de 1 on obtient (voir 1.1) :

$$(g \circ f)'(a) = \mathrm{d}g(f(a))(f'(a)) \quad (\in G).$$

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}$: on a alors :

$g^* = g \circ f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$ où les fonctions f_k vont de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et g de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. La matrice jacobienne de g^* en a est le produit des matrices jacobiennes $\left(\frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a))\right)_{1\le j\le p}$ de dg en $f(a)$ et de celle $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(f(a))\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$ de df en a. En effectuant ce produit on trouve :

$$\frac{\partial g^*}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}\left(f(a)\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Si on pose $y_1 = f_1, \ldots, y_p = f_p$, on peut retenir cette dernière formule sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial g\left(y_1, ..., y_p\right)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}\left(y_1, ..., y_p\right)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}$$ (pour $1 \le i \le n$, les y_k étant des fonctions de n variables $x_1, \ldots, x_n$).

$\frac{\partial g}{\partial y_k}$ désigne la dérivée partielle de g par rapport à la k-ième variable.

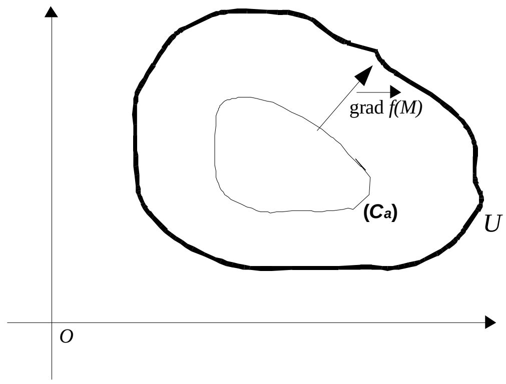
Exemple : f étant une fonction différentiable dans $\mathbb{R}^3$ soit la fonction $g : (x, y) \mapsto f(\cos x - y, x^2 + \sin y, 3x + y^2)$. On a, en posant $y_1 = \cos x - y$, $y_2 = x^2 + \sin y$ et , $y_3 = 3x + y^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\sin x \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(y_1, y_2, y_3\right) + 2x\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(y_1, y_2, y_3\right) + 3\frac{\partial f}{\partial y_3}\left(y_1, y_2, y_3\right).$$

Application : gradient d'une fonction.

Soit f une fonction différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad } f}\left(x_0, y_0\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \end{pmatrix}$ s'appelle *gradient de* f au point $(x_0, y_0) \in U$.



Soit (C_a) la courbe du plan d'équation implicite $f(x, y) = a$ (*équipotentielles de f*). Supposons qu'elle admette des équations paramétriques $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$, u et v étant des fonctions dérivables sur un intervalle réel I. Pour tout t de I on a $f(u(t), v(t)) = a$. En dérivant les deux membres par rapport à t on obtient d'après la formule précédente :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(u(t), v(t)\right)u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u(t), v(t)\right)v'(t) = 0.$$

Cela signifie qu'en tout point de la courbe (C) le vecteur $\overrightarrow{\text{grad } f}$ est orthogonal au vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$, vecteur directeur de la tangente à (C_a) au point $M(u(t), v(t))$.

<u>Conclusion</u> : en tout point de U le vecteur $\overrightarrow{\text{grad } f}$ est orthogonal aux équipotentielles $f(x, y) = a$ de f.