2.2 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de U tels que le segment $[ab]$ soit inclus dans U.

Idée de la méthode : on se ramène à une variable en paramétrant le segment $[x; y]$ par $\gamma : t \mapsto (1-t)a + tb$.

Si f est différentiable sur U alors l'application $F : t \mapsto f((1-t)a + tb))$ est dérivable sur $[0; 1]$ de dérivée

$df((1-t)a + ta)(b - a)$ (voir 1.5) ou encore $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big((1-t)a + tb\big)(b_k - a_k)$ en posant $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$.

Le théorème des accroissements finis appliqué à f donne alors l'existence d'un réel $\theta \in]0; 1[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big((1-\theta)a + \theta b\big)(b_k - a_k) \text{ et } c = (1-\theta)a + \theta b \in]a; b[.$$

Théorème des accroissements finis pour une fonction à *n* variable à valeur réelle : soit f une fonction différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b appartenants à U tels que le segment $[ab]$ soit inclus dans U.
Alors il existe c appartenant à $]ab[$ tel que : $f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k)$