2.4 Cas général

Théorème des accroissements finis : soit f une fonction d'un ouvert U d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F . Soient a et b appartenants à U tels que le segment $[a; b]$ soit inclus dans U . On suppose que f est continue sur $]ab[$ et admet en tout point de $]ab[$ une différentielle telle que : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall \xi \in]ab[, \|df(\xi)\| \leq M$.

Alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$.

(la norme de $df(\xi)$ est subordonnée aux normes de E et F). La démonstration utilise le

Lemme : soient a et b des réels ($a < b$), $f : [a; b] \rightarrow F$ (espace vectoriel) et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux application continues dérivables sur $]a b[$ telles que : $\forall t \in]ab[, \|f'(t)\| \leq g'(t)$.

Alors on a : $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Démonstration du lemme : fixons $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ l'application de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $\|f(t) - f(a)\| - g(t) + g(a) - \varepsilon(t - a)$.

Soit E l'ensemble des t appartenant à $[a; b]$ tels que $\varphi(t) \leq \varepsilon$.

E est non vide car $a \in E$. Posons $c = \text{Sup } E$ et montrons que $c = b$. On aura le résultat voulu en remplaçant t par b dans l'inégalité $\varphi(t) \leq \varepsilon$ puis en faisant tendre ε vers 0.

On a $c > a$ (en effet φ étant continue sur $[a; b]$ et $\varphi(a) = 0$ on a $\varphi(t) \leq \varepsilon$ pour $a \leq t \leq a + \alpha$, avec $\alpha > 0$).

On a $c \in E$ (en effet E est un fermé de $[a; b]$ comme image réciproque du fermé $]-\infty; \varepsilon]$ de $\mathbb{R}$ par φ continue).

Supposons que $c \neq b$. On a alors $c \in]a; b[$. Comme f et g sont dérivables en c il existe $t \in]c; b]$ tels que :

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| \leq \|f'(c)\| + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad g'(c) \leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \varepsilon/2.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ ces deux inégalités impliquent :

$$\|f(t) - f(c)\| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c).$$

D'autre part, comme $c \in E$, on a :

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon.$$

Ces deux dernière inégalités donnent, compte tenu de l'inégalité triangulaire :

$$\|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon.$$

On en déduit que $t \in E$, ce qui est absurde car $c = \text{Sup } E$ et $t > c$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème : on applique le lemme en prenant $\psi : t \mapsto f(a + t(b - a))$ de $[0; 1]$ dans F , qui est bien définie (car $[a; b] \subset F$), continue sur $[0; 1]$ comme composée de fonctions continues, et dérivable sur $]0; 1[$ de dérivée $df(a + t(b - a))(b - a)$. Comme $\|df(a + t(b - a))(b - a)\| \leq \|df(a + t(b - a))\| \cdot \|b - a\| \leq M \cdot \|b - a\|$, en prenant pour g la fonction $t \mapsto M \cdot \|b - a\| \cdot t$ on obtient : $\|\psi(1) - \psi(0)\| \leq M\|b - a\|$

d'où le théorème.

Exercice 7

Montrer le système dans $\mathbb{R}^2$: $x = \frac{1}{2} \sin(x + y)$, $y = \frac{1}{2} \cos(x - y)$ a une unique solution.

Remarque : supposons f de classe C^1 sur U l'application $\varphi(t) = f((1 - t)a + tb)$ est de classe C^1 sur $[a; b]$ et de dérivée $df((1 - t)a + tb)(b - a)$, donc on a $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 df((1 - t)a + tb) \cdot (b - a) dt = f(b) - f(a)$. Si on pose

$$M = \text{Sup}_{\xi \in [a; b]} \|df(\xi)\| \text{ on obtient : } \|f(b) - f(a)\| \leq \int_0^1 \|df((1 - t)a + tb) \cdot (b - a)\| dt \leq \int_0^1 \|df((1 - t)a + tb)\| \cdot \|b - a\| dt$$

$$\leq M\|b - a\|.$$

On obtient ainsi un énoncé du théorème des accroissements finis avec des hypothèses un peu plus fortes mais de démonstration beaucoup plus facile et suffisant dans la plupart des cas.