

3.1 Définitions (cas $n = 2$)

Soit f une application d'un ouvert U de E dans un espace de Banach F différentiable en tout point de U . Sa différentielle df est donc une application de U dans $L(E, F)$. Si df est elle-même différentiable sa différentielle $d(df)$, notée d^2f ou f'' est donc une application de U dans $L(E, L(E, F))$.

$L(E, L(E, F))$ s'identifie à l'espace vectoriel des formes bilinéaires de E dans F :

Théorème : Les applications

$$\begin{aligned} \Phi: L(E, L(E, F)) &\rightarrow L_2(E, F) & \Psi: L_2(E, F) &\rightarrow L(E, L(E, F)) \\ \varphi &\mapsto ((h, k) \mapsto \varphi(h)(k)) & \text{et} & \quad u \mapsto (h \mapsto u(h, .)) \end{aligned}$$

sont linéaires, continues et conservent la norme.

$L_2(E, F)$ est muni de la norme : $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|u(x, y)\|$.

Définition : Soit f une application différentiable d'un ouvert U de E dans F . Si $df: U \rightarrow L(E, F)$ est différentiable en $a \in U$ on dit que f est deux fois différentiable en a .

Si f est deux fois différentiable en tout point de U on dit que f est deux fois différentiable sur U . L'application $d(df): U \rightarrow L(E, L(E, F))$ se note alors d^2f et s'appelle différentielle d'ordre 2 (ou différentielle seconde) de f sur U .

Si d^2f est continue sur U on dit que f est de classe C^2 sur U .

Si on identifie $L(E, L(E, F))$ à $L_2(E, F)$ à l'aide du théorème précédent d^2f est une application de U dans $L_2(E, F)$, et pour tout x de U $d^2f(x)$ est une application bilinéaire de E dans F . L'identification précédent revient à écrire, pour $u \in L(E, L(E, F))$ et $(h, k) \in E \times E$:

$$u(h)(k) = u(h, k).$$

Les définitions précédentes se généralisent : on peut définir de la même façon une application p fois dérivable sur un ouvert U de E et sa différentielle $d^p f$ par récurrence en posant $d^p f = d(d^{p-1}f)$. Si $a \in U$, $d^p f(a)$ peut être identifiée à une application p -linéaire de E dans F .