3.2 Cas des fonctions de plusieurs variables

Prenons ici $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique.

Proposition : si f est deux fois différentiable en $a \in U$ alors f possède des dérivées partielles en a jusqu'à l'ordre 2 et on a, pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = d^2f(a)(e_i, e_j).$$

On a donc pour tous $h = (h_1, \dots, h_n)$ et $k = (k_1, \dots, k_n)$ de $\boldsymbol{K}^n$:

$$\boxed{d^2f(a)(h, k) = \sum_{1 \le i, j \le n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}$$

Démonstration : on a : $df(a + h) - df(a) = d^2f(a)(h) + o(h)$ $(o(h) \in L(\mathbb{R}^n, F))$.

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ on a donc : $df(a + h)(e_j) - df(a)(e_j) = d^2f(a)(h)(e_j) + o(h)$ (ici $o(h) \in F$),

soit, en posant $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i d^2 f(a)(e_i, e_j) + o(h)$.

Cela signifie que l'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ est différentiable en a et que sa différentielle est $h \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i d^2 f(a)(e_i, e_j)$.

On a donc pour $i \in \{1, \dots, n\}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = d^2f(a)(e_i, e_j)$.

Corollaire : si f est deux fois différentiable en $a \in U$ alors $d^2f(a)$ est une application bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : résulte du théorème de Schwarz.

Proposition : f est de classe C^2 dans U ssi f possède des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2.

Démonstration : résulte du second théorème du 2.3.1.

Généralisation : si f est p fois différentiable en $a \in U$ alors f possède des dérivées partielles en a jusqu'à l'ordre p et on a, pour tous $i_1, \dots, i_p$ de $\{1, \dots, n\}$: $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a) = d^pf(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$.

Pour toute permutation σ de $\{1, \dots, p\}$ on a : $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(p)}}}(a) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a)$.

$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a)$ sont les composantes de $d^pf(a)$ dans la base canonique de $L^p(E, F)$ et $d^pf(a)$ est une application p linéaire symétrique.