4.1.2 Formule de Taylor-Young

Théorème : soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}$ à valeur dans un espace de Banach F et n fois dérivable en $a \in D$. Alors on a pour tout réel h tel que $[a; a + h] \subset D$:

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(h^n)$$

Démonstration : on raisonne par récurrence sur n. La formule est vraie pour $n = 1$, f étant dérivable au point a.

Supposons la propriété vraie au rang n. Posons $r_{n+1}(t) = f(a+t) - f(a) - tf'(a) - t^2 \frac{f''(a)}{2!} - \dots - t^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$

pour $|t| \leq h$. Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de récurrence appliqué à r'_{n+1} donne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$|t| < \alpha \Rightarrow \|r'_{n+1}(t)\| \leq \varepsilon |t|^n, \text{ d'où, pour } |t| \leq |h| < \alpha, \ \|r'_{n+1}(t)\| \leq \varepsilon |h|^n$$

Le théorème des accroissements finis donne alors $\|r_{n+1}(h) - r_{n+1}(0)\| \leq \varepsilon.|h|^n.|h| = \varepsilon.|h|^{n+1}$, soit

$\|r_{n+1}(h)\| \leq \varepsilon.|h|^{n+1}$ pour $|h| < \alpha$, d'où le résultat au rang $n + 1$.