4.2.1 Résultat préliminaire

Soit f une fonction dérivable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un espace de Banach F. Soit $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que le segment $[a; a+h]$ soit inclus dans U. On peut se ramener au cas d'une fonction d'une variable en considérant la fonction φ définie dans un voisinage de $[0; 1]$ et à valeurs dans F par : $\varphi(t) = f(a+th)$.

Posons $h = (h_1; ... ; h_n)$ et $a = (a_1; ... ; a_n)$. On a ainsi : $\varphi(t) = f(a_1 + th_1; ... ; a_n + th_n)$. Le théorème de la dérivée d'une fonction composée donne : $\varphi'(t) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+th) + ... + h_n \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)$.

En supposant f de classe C^2 sur U on a de même :

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th).$$

Compte tenu du théorème de Schwarz il vient :

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a+th) + 2\sum_{i<j}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th).$$

Pour écrire la formule pour tout n on note, si $\alpha = (i_1, ... , i_n) \in \mathbb{N}^n$:

- $|\alpha| = i_1 + ... + i_n$ (*longueur* de α)

- $\alpha! = i_1! ... i_n!$

- $h^\alpha = h_1^{i_1} \cdot ... h_n^{i_n}$

- $\partial x^\alpha = \partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}$

On voit alors que l'on a la formule (si f est p fois dérivable sur U) : $\varphi^{(p)}(t) = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} h^\alpha \frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha}(a+th)$.

Cela revient à développer symboliquement $\left(\sum_{i=0}^{n} h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^p$ en utilisant la formule du multi-nôme.

Par exemple pour $n = 2$ on a : $\varphi^{(p)}(t) = \sum_{i+j=p} \frac{p!}{i!\,j!} h_1^i h_2^j \frac{\partial^p f}{\partial x^i \partial y^j}(a+th)$

(c'est un polynôme homogène en h_1 et h_2 de degré total p).