4.2.2 Formules de Taylor pour une fonction de plusieurs variables

On applique les résultats du 4.1, 4.2 et 4.3 à la fonction φ définie précédemment et on obtient :

Formule de Taylor-Lagrange : soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^m sur U et $[a; a + h]$ un segment inclus dans U. Si f admet des dérivées partielle à l'ordre $m + 1$ en tout point de $]a; a + h[$ alors il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a) + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^\alpha}(a+\theta h)$$

Remarquons que dans le théorème précédent f doit être une fonction *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

Par exemple, pour une fonction de deux variable :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i+j=k} \frac{h_1^i h_2^j}{i!j!} \frac{\partial^p f}{\partial x^i \partial y^j}(a) \right) + \sum_{i+j=m+1} \frac{h_1^i h_2^j}{i!j!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^i \partial y^j}(a+\theta h)}$$

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ on a :

Inégalité de Taylor-Lagrange : soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, de classe C^m sur U et $[a; a + h]$ un segment inclus dans U. Si f admet en tout point de $]a; a + h[$ une différentielle d'ordre $m + 1$ et s'il existe un réel M tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = m + 1$ et tout t de $]0; 1[$on ait : $\left\| \frac{\partial^{m+1} f}{\partial^\alpha x}(a+th) \right\| \leq M$, alors on a :

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a) \right\|_1 \leq \frac{M \|h\|_1^{m+1}}{(m+1)!}$$

Démonstration : avec les notations précédentes l'application φ définie dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant $[0; 1]$ est de classe C^m sur I et est $m + 1$ fois dérivable sur $]0: 1[$. De plus pour tout t de l'intervalle $]0; 1[$ on a :

$$\|\varphi^{(m+1)}(t)\| \leq \left\| \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} h^\alpha \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^\alpha}(a+th) \right\|_1 \leq \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} |h|^\alpha \left\| \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^\alpha}(a+th) \right\|$$

$$\leq \left(\sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} |h|^\alpha \right) M = \left(\sum_{i=1}^{n} |h_i| \right)^{m+1} M = \|h\|_1^{m+1} M$$

(où on a posé $|h| = (|h_1|, \dots , |h_n|)$). On obtient la formule annoncée en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction φ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Théorème de Taylor-Young : soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, m fois différentiable au point a. Alors on a : $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a) + o(\|h\|^m)$

Démonstration : avec les notations précédentes on a si on pose $h = th_0$ avec $t = \|h\|$, la formule de Taylor-Young appliqué à φ donne : $f(a + h) = f(a + th_0) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{h_0^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a) \right) t^k + o(t^m)$,

soit $f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{(th_0)^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a) \right) + o(\|h\|^m) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(a) \right) + o(\|h\|^m)$.