5.1.1. Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre 1

Ce sont des équations différentielles du type :

$y' = a(t)y + b(t)$ **(*E*)** ou $y' = a(t)y$ **(*H*)**

(**(*E*)** est appelée *équation différentielle avec second membre* et **(*H*)** *équation homogène* associée). a et b sont des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ continues sur I, et l'inconnue y une fonction dérivable I dans $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Recherchons d'abord les fonctions ne s'annulant pas sur I solutions de **(*H*)**. L'équation **(*H*)** équivaut alors à $\dfrac{y'}{y} = a(t)$, et en intégrant les deux membres : $\ln |y| = A(t) + K$, où A est une primitive de a sur I et K est une constante. Soit : $|y| = Ce^{A(t)}$, où C est une constante > 0. Comme y ne s'annule pas sur I et est continue il résulte du théorème de la valeur intermédiaire qu'elle garde un signe constant. Ainsi $y = Ce^{A(t)}$, où C est une constante non nulle.

Pour résoudre l'équation **(*H*)** dans le cas général on est conduit à poser $y = z.e^{A(t)}$. L'équation **(*H*)** équivaut à $z'\, e^{A(t)} = 0$, soit $z' = 0$ i.e. z = constante.

L'ensemble des solutions de **(*H*)** est donc $\{t \mapsto C\, e^{A(t)}\}$.

<u>Théorème</u> :

(i) Les solutions de **(*H*)** : $y' = a(t)y$ sont les fonctions de la forme $y(t) = C\, e^{A(t)}$ (où C est une constante arbitraire)

(ii) Les solutions de **(*E*)** : $y' = a(t)y + b(t)$ sont les fonctions de la forme $y(t) = C\, e^{A(t)} + \varphi(t)$ (où φ est une solution particulière de l'équation homogène **(*H*)** et C est une constante arbitraire)

(iii) Soit $t_0 \in I$ et y_0 un réel quelconque. Le système $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

<u>Démonstration</u> : **(i)** a été démontré ci-dessus.

(ii) y est solution de **(*E*)** ssi $y' = a(t)y + \varphi'(t) - a(t)\varphi(t)$ (car $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$) soit $z' = a(t)z = 0$ (où on a posé $z = y - \varphi$), ce qui équivaut à $z(t) = y(t) - \varphi(t) = C\, e^{A(t)}$, d'où le résultat.

(iii) Avec les notations précédentes le système équivaut à $y(t) = C\, e^{A(t)} + \varphi(t)$ et $Ce^{A(t_0)} + \varphi(t_0) = y_0$ ce qui détermine C de façon unique ($e^{A(t_0)}$ étant non nul).

<u>Remarques</u> : 1/ l'ensemble des solutions de **(*H*)** est un espace vectoriel de dimension 1 de base $t \mapsto e^{A(t)}$.

2/ Pour résoudre **(*E*)** il suffit donc de trouver une solution particulière de **(*E*)**. Si une telle solution n'est pas évidente on essaie d'en trouver de la forme $t \mapsto C(t)e^{A(t)}$ où cette fois $t \mapsto C(t)$ est une fonction de I dans $\boldsymbol{K}$ (méthode dite de *variation de la constante*).

Exercice 12

1/ Résoudre l'équation différentielle $(e^x - 1)y' = (e^x + 1)y$. Y–a t-il des solutions dans $\mathbb{R}$?

2/ Même question avec $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$.