5.1.2. Equations différentielles vectorielles linéaires d'ordre 1

Soit n un entier naturel non nul. Une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 est une équation du type $Y'(t) = A(t).Y(t) + B(t)$ **(*E*)** où $t \mapsto A(t)$ est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices carrées $M(n, n)$, et $t \mapsto B(t)$ une application continue de I dans $\boldsymbol{K}^n$. L'inconnue est une application $t \mapsto Y(t)$ est une application dérivable de I dans $\boldsymbol{K}^n$.

Si on pose $A(t) = (a_{i,j}(t))$ $(1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n)$ l'hypothèse de continuité de $t \mapsto A(t)$ signifie que chaque application $t \mapsto a_{i,j}(t)$ est continue de I dans $\boldsymbol{K}$. De même, si $B(t) = (b_i(t))$ et $Y(t) = (y_i(t))$ $(1 \le i \le n)$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ chaque application $t \mapsto b_i(t)$, et $t \mapsto y_i(t)$ sont continues de I dans $\boldsymbol{K}$.

Avec les notations précédentes l'équation s'écrit de façon équivalente sous la forme d'un *système différentiel linéaire* :

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(t)y_1 + \dots + a_{1,n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{2,1}(t)y_1 + \dots + a_{2,n}(t)y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n,1}(t)y_1 + \dots + a_{n,n}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

Si $B(t) = 0$ on obtient l'équation $Y'(t) = A(t).Y(t)$ **(*H*)** (où le système) est dit homogène associé à (E).

<u>Théorème</u> : **(i)** Soit $(t, Y_0) \in I \times \boldsymbol{K}^n$. Alors le système $\begin{cases} Y' = A(t)Y(t) + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ (appelé *problème de Cauchy*) a une unique solution.

(ii) L'ensemble (S_H) de l'équation homogène $Y' = A(t)Y$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\boldsymbol{K}$.

(iii) Les solutions de l'équation $Y'(t) = A(t).Y(t) + B(t)$ sont de la forme $Y_H + \Phi$ où Y_H est une solution quelconque de l'équation homogène associée et Φ une solution particulière de l'équation (E).

<u>Démonstration</u> : (i) Voir chapitre Topologie, 1.2, exercice 3, 3°/.

(ii) Il est clair que l'ensemble (S_H) de l'équation $Y' = A(t)Y$ est un espace vectoriel. Etant donné $t_0 \in I$, l'application de S_H dans K^n qui à Y associe $Y(t_0)$ est clairement linéaire et est bijective par l'unicité de la solution du problème de Cauchy ((i)) et c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où le (ii).

(iii) Même démonstration que dans le cas scalaire.

D'après (ii) du théorème précédent, si $Y_1, Y_1, \dots, Y_n$ sont des solution de l'équation (H) linéairement indépendantes alors les solutions de (H) sont de la forme $Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \dots + \alpha_n Y_n$. Un tel système $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ s'appelle *système fondamental de solutions* de **(*H*)**.

<u>Définition</u> : si $Y_1, Y_1, \dots, Y_n$ sont des solution de l'équation (H) l'application w de I dans K définie par $t \mapsto \text{dét}(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$ s'appelle *wronskien* du système de solutions $(Y_1, Y_1, \dots, Y_n)$.

On a alors le :

<u>Théorème</u> : les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Le système $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de **(*H*)**;

(ii) Pour tout t de I on a $w(t) \neq 0$;

(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

<u>Démonstration</u> : Supposons (i) vérifié et soit $t_0 \in I$. Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Y_k(t_0) = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Y_k$ est solution du problème de Cauchy $Y' = A(t)Y$ et $Y(t_0) = 0$, et par unicité de sa solution on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Y_k = 0$, donc $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, puisque le système $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est libre. Donc pour tout $t_0 \in I$, le système $(Y_1(t_0), Y_2(t_0), \dots, Y_n(t_0))$ est libre d'où $w(t_0) \neq 0$.

Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons (iii) vérifiée et que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k Y_k = 0$; alors en particulier $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k Y_k(t_0) = 0$ et donc $\alpha_k = 0$ pour $1 \le k \le n$, car par hypothèse le système ($Y_1(t_0)$, $Y_2(t_0)$, ... , $Y_n(t_0)$) est libre. Le système (Y_1, Y_2 , ... , Y_n) est donc libre et c'est un système fondamental de solution de ***(H)***.

Exercice 13

Soit ($Y_{1,}$ $Y_{1,}$ ... , Y_n) un système fondamental de solutions de l'équation $Y' = AY$. Montrer que le wronskien $t \mapsto$ dét($Y_1(t)$, $Y_2(t)$, ... , $Y_n(t)$) = $w(t)$ vérifie l'équation différentielle scalaire linéaire $y' = \mathrm{Tr}(A(t))y$.

En déduire que pour tout $(t_0, t) \in I \times I$ on a : $w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(u))du}$

(on retrouve ainsi les résultats (ii) et (iii) du théorème précédent.

<u>Remarque</u> : si (Y_1, Y_2 , ... , Y_n) est un système fondamental de solutions de **(*H*)** pour résoudre l'équation $Y'(t) = A(t).Y(t) + B(t)$ **(*E*)** il suffit de trouver une solution particulière de **(*E*)**. On peut encore employer la méthode de variation de la constante en la cherchant sous la forme $Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) Y_k(t)$ où les α_k sont des fonctions dérivables sur I. Un calcul facile montre que Y est solution de **(*E*)** ssi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k'(t) Y_k(t) = B(t)$.

<u>Exemple</u> : soit le système linéaire $\begin{cases} u' = -tu + v + 1 \\ v' = (1-t^2)u + tv + t \end{cases}$, ou, sous forme matricielle : $Y' = A.Y + B$, avec $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1-t^2 & t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. On vérifie que les fonctions $Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$ sont solutions de l'équation homogène $Y' = A.Y$ dans $\mathbb{R}$. De plus : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $w(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & t^2+1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc le couple ($Y_1$, Y_2) est un système fondamental de solutions de (H). Les solution de (H) s'écrivent donc $Y(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t)$ avec $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{K}^2$.

On cherche une solution particulière sous la forme $Y(t) = \alpha(t)Y_1(t) + \beta(t)Y_2(t)$. On obtient :

$\alpha'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \beta'(t) \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} \alpha'(t) + t\beta'(t) = 1 \\ t\alpha'(t) + (t^2+1)\beta'(t) = t \end{cases}$. On trouve : $\begin{cases} \alpha'(t) = 1 \\ \beta'(t) = 0 \end{cases}$, d'où, par exemple :

$\alpha(t) = t$ et $\beta(t) = 1$.

Une solution particulière est donc $t\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2+1 \end{pmatrix}$.