5.1.3. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants; exponentielle d'une matrice

Ces systèmes s'écrivent $\begin{cases} y_1' = a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{2,1}y_1 + \dots + a_{2,n}y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n,1}y_1 + \dots + a_{n,n}y_n + b_n(t) \end{cases}$ où les $a_{i,j}$ sont des complexes et les b_i des fonctions continues sur l'intervalle I. Si on pose $A = (a_{i,j})$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, le système précédent est équivalent à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre : $Y'(t) = AY(t) + B(t)$ et les théorèmes du 5.1.2 sont valables.
Cependant on sait résoudre de tels systèmes différentiels d'ordre 1 à coefficients constants (du moins théoriquement).

<u>Exponentielle d'une matrice</u> : soit $A \in M_n(\boldsymbol{K})$, muni d'une norme dérivant d'une norme de $\boldsymbol{K}^n$ (voir "Topologie", 4.3.2). Pour tout entier naturel k on a $\dfrac{\|A^k\|}{k!} \leq \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ terme général d'une série numérique convergente, ce qui prouve que la série de terme général $\dfrac{A^k}{k!}$ est absolument convergente donc convergente (l'espace vectoriel normé $M_n(\boldsymbol{K})$ étant complet car de dimension finie : "Topologie" Théorème du 4.1).

<u>Définition</u> : on appelle *exponentielle* de A la matrice notée e^A définie par : $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

On alors le

<u>Théorème</u> : **(i)** La solution du problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t)$ et $Y(t_0) = Y_0$ est définie par $t \mapsto e^{(t-t_0)A}.Y_0$.

(ii) Les solutions de l'équation différentielle homogène $Y'(t) = AY(t)$ sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\boldsymbol{K}^n$ définie par $t \mapsto e^{tA}.Y_0$ où Y_0 est une élément quelconque de $\boldsymbol{K}^n$.

<u>Démonstration</u> : **(i)** soit f_k fonctions de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\boldsymbol{K}^n)$ définie par $t \mapsto \dfrac{t^k A^k}{k!}$. Pour $t \in [-a; a]$ (a réel > 0) et k entier naturel non nul on a $\left\| \dfrac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} \right\| \leq \dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}\|A\|^k$ ce qui prouve que la série $\sum f_k'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a; a]$: on peut donc dériver termes à termes et on obtient pour tout réel t :

$(e^{tA})' = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = A\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) = Ae^{tA}$ (compte tenu le la continuité de l'application $X \mapsto AX$, de $\boldsymbol{K}^n$ dans $\boldsymbol{K}^n$). On en déduit facilement que la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{tA}.Z$ est $Ae^{tA}.Z$ pour tout Z de $\boldsymbol{K}^n$. Ainsi $t \mapsto e^{tA}.Z$ est solution de l'équation $Y'(t) = AY(t)$. La fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)A}.Y_0$ est donc solution de l'équation $Y'(t) = AY(t)$ et de plus sa valeur en t_0 est $I_n.Y_0 = Y_0$: c'est donc la solution du problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t)$ et $Y(t_0) = Y_0$ (cette solution étant unique d'après 5.1.2).

(ii) Une solutionY_1 de l'équation différentielle homogène $Y'(t) = AY(t)$ est la solution du problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t)$ et $Y(0) = Y_1(0)$, donc $Y_1(t) = e^{tA}.Y_1(0)$ d'après (i). Réciproquement les fonctions $t \mapsto e^{tA}.Y_0$ où Y_0 est une élément quelconque de $\boldsymbol{K}^n$ sont bien solution de l'équation différentielle $Y'(t) = AY(t)$.

Le résultat précédent permet de préciser certaines propriétés de l'exponentielle d'une matrice.

<u>Propriétés</u> : (i) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $M_n(\boldsymbol{K})$ alors :

$e^{A+B} = e^A e^B$.

(ii) Pour toute matrice A de $M_n(\boldsymbol{K})$, e^A est inversible et : $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Démonstration : **(i)** Soit $Z \in \boldsymbol{K}^n$ et posons $\varphi(t) = e^{At}\, e^{Bt}.Z$. On a $\varphi'(t) = A\, e^{At}\, e^{Bt}.Z + e^{At}B\, e^{Bt}.Z$. Comme A et B commutent on a pour tout entier naturel p : $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right)B = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k B}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{BA^k}{k!} = B\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right)$ et par continuité de l'application $X \mapsto AX$ et $X \mapsto XA$ on en déduit, en faisant tendre p vers l'infini : $e^{At}B = Be^{At}$.

On a donc pour tout t : $\varphi'(t) = Ae^{At}\, e^{Bt}.Z + Be^{At}\, e^{Bt}.Z = (A + B)\, e^{At}\, e^{Bt}.Z = (A + B)\varphi(t)$. De plus $\varphi(0) = Z$ donc φ est l'unique solution du problème de Cauchy $Y' = (A + B)Y$ et $Y(0) = Z$; par ailleurs $t \mapsto e^{(A+B)t}.Z$ vérifie aussi ce système donc par unicité de la solution on a pour tout t et tout Z de $\boldsymbol{K}^n$: $e^{At}\, e^{Bt}.Z = e^{(A+B)t}.Z$. Donc $e^{At}\, e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ pour tout t et en particulier pour $t = 1$, $e^A\, e^B = e^{A+B}$.

(ii) D'après (i) on a : $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_n = e^{-A}e^A$ d'où le (ii).

Calcul de l'exponentielle d'une matrice : Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale on a pour tout entier p :

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$ et quand p tend vers l'infini : $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Si A est une matrice diagonalisable il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ soit $A = PDP^{-1}$. Pour tout entier k on a $A^k = PD^kP^{-1}$ et donc pour tout entier p : $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1}$. En faisant tendre p vers l'infini on a, en vertu de la continuité de l'application $X \mapsto PXP^{-1}$ de $\boldsymbol{K}^n$ dans lui même) : $e^A = Pe^DP^{-1}$.

Si N est une matrice nilpotente (i.e. il existe un entier p tel que $N^p = 0$). Alors $N^q = 0$ pour $q \geq p$ donc :

$$e^N = I + N + \frac{N^2}{2!} + \ldots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Dans le cas général, étant donnée une matrice A il existe deux matrices D et N avec D diagonalisable, N nilpotente et telles que $DN = ND$ (voir "Réduction des matrices", 1.5) donc $e^A = e^De^N$.

On peut exprimer autrement les solution de l'équation $Y' = AY$ si on connaît la décomposition du polynôme minimal de A en produit de polynômes de degré 1 :

Théorème : Soit $\mu(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ le polynôme minimal de A, les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ étant distinctes deux à deux dans $\mathbb{C}$. Si Y est solution de l'équation différentielle $Y' = AY$ alors on a $Y(t) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k t} P_k(t)$ où, pour $1 \leq k \leq p$, P_k sont des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à $\beta_k - 1$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

On rappelle que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A (voir "Réduction des matrices", théorème du 1.4).

Démonstration : Soit $N_k = \operatorname{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{\beta_k}$ le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ_k. On a alors $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} N_k$ ("Réduction des matrices", théorème du 1.4). Soit Z une solution de $Y' = AY$ et posons $Z(0) = y_1 + \ldots + y_p$ avec $y_k \in N_k$ pour $1 \leq k \leq p$. Si Z_k est solution du problème de Cauchy $Y' = AY$ et $Y(0) = y_k$ alors $Z_1 + \ldots + Z_p$ est solution du problème de Cauchy $Y' = AY$ et $Y(0) = y_1 + \ldots + y_p = Z(0)$ et à cause de l'unicité de la solution du problème de Cauchy on a $Z = Z_1 + \ldots + Z_p$.

D'autre part on a : $Z_k = e^{tA}y_k$ $(1 \leq k \leq p)$. On écrit : $Z_k = e^{t\lambda_k I}\, e^{(A - \lambda_k I)t}.y_k$.

On sait que la restriction de $A - \lambda_k I$ à N_k est nilpotente d'indice β_k donc $e^{(A-\lambda I)t}\, y_k. = \sum_{j=0}^{\beta_k - 1} \frac{t^j}{j!}\left(A - \lambda_k I\right)^j y_k$, d'où :

$$Z_k = e^{\lambda_k t}\sum_{j=0}^{\beta_k-1}\frac{t^j}{j!}\left(A-\lambda_k I\right)^k y_k \ .$$

En posant $P_k(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\beta_k-1}\frac{t^j}{j!}\left(A-\lambda_k I\right)^j y_k$ on obtient $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k t} P_k(t)$.

Résolution pratique d'un système différentiel *Y' = AY* : si A est diagonalisable il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale telle que $D = P^{-1}AP$. Le système s'écrit $Y' = PDP^{-1}Y$ soit si on pose $Y = PZ$: $P^{-1}Y' = DZ$ ou encore $(P^{-1}Y)' = DZ$. On est donc conduit à résoudre $Z' = DZ$, où D est une matrice diagonale, système qui se résout facilement. Si A n'est pas diagonalisable on la trigonalise dans $M_n(\mathbb{C})$ et on est conduit à un système triangulaire que l'on résout de proche en proche. Ces méthodes peuvent aussi s'appliquer pour un système à coefficients non constants le la matrice $A(t)$ si diagonalise ou se trigonalise dans une base indépendante de t.

Exercice 14

Résoudre les systèmes **a/** $\begin{cases} x' = -x+8y-2z \\ y' = x+3y-z \\ z' = 3x-6y+2z \end{cases}$; **b/** $\begin{cases} x' = 19x+11y-45z \\ y' = 4x+4y-10z \\ z' = 8x+5y-19z \end{cases}$; **c/** $\begin{cases} x' = t(4-3t)x+(2t^2-2t)y+4t-3t^2 \\ y' = 6t(1-t)x+(4t^2-2t)y+6t-6t^2 \end{cases}$