5.1.4. Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre n

Ce sont des équations du type :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_0(t)y = b(t) \quad \textbf{(E)}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_0(t)y = 0 \quad \textbf{(H)}$$

où les a_k et b sont des applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

<u>Idée de la méthode</u> : se ramener à un système linéaire du premier ordre en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Les équations ***(E)*** et ***(H)*** s'écrivent alors matriciellement : $Y' = A(t)Y + B(t)$ et $Y' = A(t)Y$

avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Les résultats du 5.1.2 s'appliquent :

Si les applications a_k $(0 \le k \le n-1)$ sont continues sur I l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n. Les solutions de (E) s'écrivent $y_H + \varphi$ où y_H est une solution quelconque de l'équation homogène (H) et φ une solution particulière de l'équation (E). Il y-a unicité du problème de Cauchy :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + ... + a_0(t)y = 0 \qquad (H)$$

$$y(t_0) = b_0,\ y'(t_0) = b_1, ... ,\ y^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1}$$

où les b_k sont des scalaires donnés et t_0 un élément quelconque de I.

Pour trouver une solution particulière de l'équation (E) on peut appliquer la méthode de variation de la constante ce qui conduit à rechercher une solution particulière de (L) sous la forme $\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_n y_n$ où $(y_1, ... , y_n)$ est une base fondamentale de solutions de (H) et les λ_k des applications de classe C^1 de I dans $\mathbb{C}$. On est conduit au système $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k' y_k^{(j)} = 0$ pour $0 \le j < n-1$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k' y_k^{(n-1)} = b$.

Si on connaît une solution z de l'équation (E) on peut essayer d'en obtenir d'autre en posant $y = uz$.