5.1.5. Equations différentielles scalaires linéaires d'ordre *n* à coefficients constants

Ce sont des équations du type :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(t) \quad \textbf{(E)}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0 \quad \textbf{(H)}$$

où les a_k sont des <u>constantes</u> réelles ou complexes et b est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Posons $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où les λ_k sont les racines distinctes deux à deux du polynôme P (l'équation $P(r) = 0$ s'appelle *équation caractéristique* de l'équation **(*H*)**).

Le résultat du paragraphe précédent s'applique mais on connaît ici la forme générale des solutions :

Les solutions de l'équation **(*H*)** s'écrivent $y(t) = \sum_{k=1}^{p} P_k(t)e^{\lambda_k t}$ où P_k est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $\alpha_k - 1$. Une base de l'ensemble S_H des solutions de **(*H*)** est $\left(t^j e^{\lambda_k t}\right)_{\substack{1\le k\le p\\ 0\le j\le \alpha_k -1}}$.

<u>Démonstration</u> : on se place dans l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et on considère l'application linéaire D qui à f dans E associe f'. L'ensemble des solutions de (H) est alors : $S_H = \mathrm{Ker}(P(D))$. D'après le théorème de décomposition des noyaux (Chap. III, I.1) on a : $S_H = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}$. Déterminons donc $\mathrm{Ker}\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}$. Si $f \in E$ on a $\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)(e^{\lambda_k t} f(t)) = e^{\lambda_k t} f'(t)$ et pour tout entier q :
$\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^q (e^{\lambda_k t} f(t)) = e^{\lambda_k t} f^{(q)}(t)$. Soit $g \in E$ et posons $g(t) = e^{\lambda_k t} f(t)$. On a :
$g \in \mathrm{Ker}\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}$ ssi $\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}(g) = 0$ ssi $e^{\lambda_k t} f^{(\alpha_k)}(t) = 0$, ce qui équivaut à dire que f est un polynôme P_k de degré inférieur ou égal à $a_k - 1$. $\mathrm{Ker}\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}$ est donc l'ensemble des fonctions $t \mapsto e^{\lambda_k t} P_k(t)$. Il est clair que le système $\left(t^j e^{\lambda_k t}\right)_{0\le j\le \alpha_k -1}$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}$ (car libre et générateur) donc, la somme
$S_H = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\left(D - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{\alpha_k}$ étant directe, le système $\left(t^j e^{\lambda_k t}\right)_{\substack{1\le k\le p\\ 0\le j\le \alpha_k -1}}$ est une base de S_H.

<u>**Remarques**</u> **:** on retrouve que la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (H) est n, conformément aux résultats de 5.1.4.

Supposons que les a_k soient des réels et cherchons les solutions réelles de l'équation (H). Soient $(\lambda_k)_{1 \le k \le q}$ les racines réelles du polynôme P de multiplicité α_k et $\left(\rho_k \pm i\omega_k\right)_{1\le k\le r}$ (ρ_k et ω_k réels) ses racines complexes non réelles (conjuguées deux à deux) de multiplicité β_k. On observe que si une fonction à valeurs complexe vérifie (H) alors ses parties réelles et imaginaires aussi. D'après le résultat précédent on dispose des solutions $\left(t^j e^{\lambda_k t}\right)_{0\le j\le \alpha_k -1}$ pour $1 \le k \le q$, $\left(t^j e^{\rho_k t}\cos\left(\omega_k t\right)\right)_{0\le j\le \beta_k -1}$ et $\left(t^j e^{\rho_k t}\sin\left(\omega_k t\right)\right)_{0\le j\le \beta_k -1}$ pour $1 \le k \le r$. Comme le système de ces n fonctions est libre c'est donc une base de l'ensemble des solutions réelles de l'équation (H).