5.2.2 Théorème de Cauchy- Lipschitz

Supposons que la fonction f soit de classe C^1 dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ une unique solution maximale (définie dans un voisinage de t_0).

Comme dans le cas linéaire la démonstration utilise encore le théorème du point fixe et se fait en plusieurs étapes.

<u>Démonstration</u> : on commence par choisir un réel $r > 0$ tel que $[t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r) \subset \Omega$. Comme

$[t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r)$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ la fonction f est bornée sur cet ensemble (car f continue) :
$\exists\, M \in \mathbb{R}$ $(M > 0)$ tel que $|f(t, y)| \leq M$ pour tout $(t, y) \in [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r)$.

Une application φ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ssi $\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))du$, autrement dit ssi φ est point fixe de l'application Φ qui à la fonction $\varphi \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$ associe la fonction $t \mapsto$
$y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))du$.

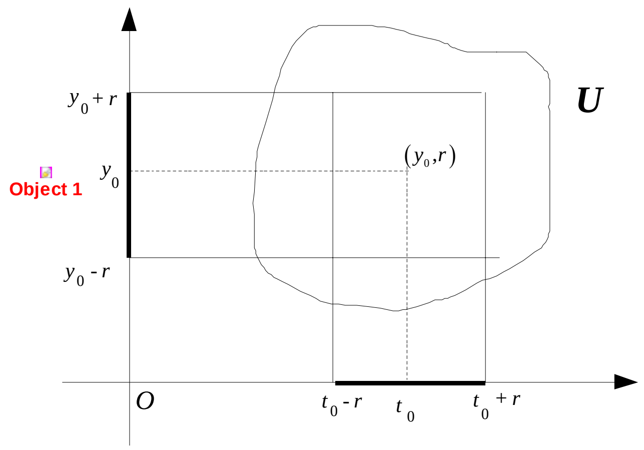
<u>Détermination d'un domaine de stabilité de Φ</u> : on choisit maintenant un réel α tel que $0 < \alpha \leq r$ afin que l'ensemble $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r))$ soit stable par Φ.

Pour $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha,]$ et $\varphi \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r))$ on a :

$\|\Phi(\varphi)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))du \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \| f(u, \varphi(u)) \| du \right| \leq |t - t_0|.M \leq \alpha.M$
. Il suffira donc de choisir α tel que

$\alpha.M < r$ et $\alpha < r$.

On dispose donc de l'application (qu'on notera encore Φ) de l'ensemble $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r))$ dans lui-même qui à la fonction φ associe la fonction $t \mapsto$
$y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))du$.



<u>Détermination d'un domaine de contraction de Φ</u> : l'ensemble $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r))$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach (voir exercice 1 du chapitre topologie). Si φ et ψ appartiennent à cet ensemble on a pour tout t de $[t_0 - \alpha,, t_0 + \alpha,]$:

$$\|\Phi(\varphi)(t) - \Phi(\psi)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u)) \right) du \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \| f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u)) \| du \right|.$$

Par hypothèse l'application $x \mapsto df(x)$ est continue donc bornée par un réel M' dans $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0, r)$. D'après le théorème des accroissements finis on a donc : $\|f(u, \varphi(u)) - f(u, \psi(u))\| \leq M'.\|\varphi(u) - \psi(u)\| \leq M'.\|\varphi - \psi\|_\infty$. Par conséquent pour tout t de $[t_0 - \alpha,, t_0 + \alpha,]$:

$$\|\Phi(\varphi)(t) - \Phi(\psi)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M'.\|\varphi - \psi\|_\infty du \right| \leq \alpha.M'.\|\varphi - \psi\|_\infty \text{ d'où } \|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty \leq \alpha.M'.\|\varphi - \psi\|_\infty .$$

L'application Φ sera donc contractante si on choisit α vérifiant de plus : $\alpha.M' < 1$.

Le théorème du point fixe assure alors que l'application Φ a un unique point fixe dans $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \overline{B}(y_0, r))$.
Ainsi le problème de Cauchy a une solution dans un voisinage de t_0.

Unicité locale d'une solution : soient φ_1 et φ_2 deux solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ définies dans un voisinage V_1 et V_2 de t_0. On peut choisir le réel α de façon à ce qu'il vérifie, en plus des conditions précédentes : $V_1 \cap V_2 \supset [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Si φ désigne l'une ou l'autre des fonctions φ_1 ou φ_2 on a $\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,\varphi(u))du$ pour tout t appartenant à $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ donc : $\|\varphi(t) - y_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f(u,\varphi(u))du\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t} \|f(u,\varphi(u))\| du\right| \le |t - t_0|.M \le \alpha.M \le r$ ce qui prouve que φ_1 et φ_2 sont à valeurs dans $\bar{B}(y_0, r)$. Le raisonnement précédent et le théorème du point fixe assurent donc l'unicité du problème de Cauchy dans le voisinage $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ de t_0. On a donc prouvé :

Pour toutes solutions φ_1 et φ_2 *du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ *il existe un voisinage* V *de* t_0 *dans lequel* $\varphi_1 = \varphi_2$.

Unicité globale d'une solution : soient φ_1 et φ_2 deux solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ définies dans des intervalles I et J contenant t_0 et montrons que φ_1 et φ_2 coïncident sur $I \cap J$. Posons pour cela $A = \{t \in I \cap J \,/\, \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$. A est non vide car il contient t_0. L'unicité locale montre que A est un ouvert de $I \cap J$. D'autre part les applications φ_1 et φ_2 étant continues A est un fermé de $I \cap J$ ($A = I \cap J \cap (\varphi_1 - \varphi_2)^{-1}(\{0\})$). A étant connexe (car c'est un intervalle de $\mathbb{R}$) il s'ensuit que $A = I \cap J$ (voir chapitre Topologie 3.1).

Existence d'une solution maximale : ce point est admis (il utilise le lemme de Zorn, qui est équivalent à l'axiome du choix).

Unicité de la solution maximale : soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions maximales du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. D'après l'unicité globale ces deux solution coïncident du $I \cap J$ donc on peut les prolonger en une solution sur $I \cup J$. Par maximalité de f et g on en déduit que $I \cap J = I = J$, donc $I = J$ et $f = g$.