

5. 3 Quelques équations différentielles particulières

Ici les fonction considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Equations à variables séparables : elles sont du type $y' f(y) = g(x)$ ou, sous forme différentielles :

$f(y)dy = g(x)dx$. Si F et G sont des primitives de f et g on obtient en intégrant les deux membres :

$$F(y) = G(x) + c.$$

Exemples : **a/** $2x^2y' + y^2 = 1$; **b/** $x^2y'^2 - y^2(1 - y^2) = 0$; **c/** $y y' = x e^{x+y}$;

Equations homogènes : elles sont du type $y' = f(y/x)$. On peut reconnaître qu'une équation est de ce type si elle ne change pas en remplaçant x et y par tx et ty .

On fait le changement d'inconnue : $u = y/x$ i.e : $y = ux$. En dérivant : $y' = u'x + u$ et l'équation devient :

$$u'x + u = f(u) \text{ qui est à variables séparables.}$$

Exemples : **a/** $(x^2 + y^2) - xy y' = 0$; **b/** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; **c/** $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$; **d/** $(x + 2y) y' + y + 2x = 0$;

Equations de Bernoulli : $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^n = 0$ ($n \neq 1$). Le changement d'inconnue $z = 1/y^{n-1}$ la ramène à l'équation linéaire avec second membre $(1 - n)z' + b(x)z + c(x) = 0$

Exemples : **a/** $y' = y + y^4$; **b/** $y' - xy + xy^3 = 0$.

Equations de Ricatti : $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = d(x)$. Si y_1 est une solution particulière le changement d'inconnue $y = y_1 + z$ permet de se ramener à une l'équation de Bernoulli :

$$a(x)z' + [b(x) + 2c(x)y_1(x)]z + c(x)z^2 = 0.$$

Exemple : $(1 + x^3)y' = y^2 + x^2y + 2x$

Equations de Lagrange : $y = xa(y') + b(y')$. Après avoir cherché les solution de la forme $y = kx$ on pose $t = y'$. Après avoir dérivé l'équation on considère x comme fonction de t et on obtient :

$$(t - f(t))x' + xf'(t) + g'(t) = 0 \text{ (équation linéaire).}$$

Equation de Clairaut : $y = xy' + b(y')$. C'est un cas particulier de l'équation précédente. Même méthode.