$\boxed{\text{I}}$ Une équation différentielle (d'après Agrégation 1991)

Soit l'équation différentielle :

$$3xy'' + (3y + 2)y' + y = 0 \quad \mathbf{(E_1)}$$

1/ Effectuer dans cette équation le changement de fonction inconnue : $y(x) = z(x)e^{-x/2}$. Montrer que y vérifie l'équation $\mathbf{(E_1)}$ ssi z vérifie l'équation différentielle :

$$3xz'' + 2z' - \frac{3}{4}z = 0 \quad \mathbf{(E_2)}.$$

2/ Transformer cette équation différentielle en une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 d'inconnue $t \mapsto Z(t) = \begin{pmatrix} z'(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$Z'(t) = A(t)Z(t) \quad \mathbf{(E_3)}$$

où $A(t)$ est une matrice (2, 2) à coefficients réels. Soient $t_0 > 0$ et deux réels a et b. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de $\mathbf{(E_3)}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ satisfaisant à la condition initiale $X(t_0) = a$ et $Y(t_0) = b$.

3/ On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme N définie par : $\forall (X, Y) \in {}^2$, $N(X, Y) = \left(X^2 + \frac{Y^2}{2}\right)^{1/2}$ (que l'on notera $\|(X, Y)\|$).

a/ Soit k un réel strictement supérieur à $1/\sqrt{2}$ .Montrer qu'il existe un réel t_0 strictement positif tel que : $\forall t \geq t_0$, $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$, $\|A(t)Z\| \leq k\|Z\|$ (avec $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$).

b/ Pour a et b réels quelconques on définit la suite de fonctions (Z_n) définies sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ par les relations : $\forall t \geq t_0$, $Z_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1}(t) = Z_0 + \int_{t_0}^{t} A(\lambda)Z_n(\lambda)d\lambda$.

Prouver que : $\forall t \geq t_0$, $\| Z_1(t) - Z_0(t)\| \leq k(t - t_0)\|Z_0\|$ et :

$$\forall n \geq 1, \ \forall t \geq t_0, \ \| Z_{n+1}(t) - Z_n(t)\| \leq k\int_{t_0}^{t} \|Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda)\| d\lambda .$$

c/ En déduire que : $\forall t \geq t_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > p$, $\| Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq \|Z_0\| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m (t - t_0)^m}{m!}$,

puis que la suite(Z_n) converge uniformément sur tout intervalle inclus dans $[t_0; t_1]$. Soit Z sa limite.

d/ Montrer que Z est solution de l'équation $\mathbf{(E_3)}$.

4/ Déterminer pour toutes solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de $\mathbf{(E_1)}$ une fonction de type exponentielle la majorant au voisinage de $+\infty$.