

1.4 Ordre d'un élément

Définition : soit x un élément d'un groupe G . On appelle *ordre de x* (ou *période de x*) le cardinal du sous-groupe $\langle x \rangle$ engendré par x si ce cardinal est fini; sinon on dit que x est d'ordre infini.

On note $\theta(x)$ l'ordre de x .

Dans un groupe fini tout élément est d'ordre fini.

Exercice 9

Donner des exemples de groupes infinis où tout élément est d'ordre fini.

Théorème : Soit x un élément d'un groupe G . Alors :

(i) x est d'ordre fini dans G ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$.

On a alors : $\theta(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / x^n = e\}$;

(ii) Pour tout entier relatif m on a : $x^m = e \Leftrightarrow m$ multiple de $\theta(x)$.

Démonstration :

(i) Supposons x d'ordre fini. Alors l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\langle x \rangle$ qui à m associe x^m n'est pas injective (car l'ensemble $\langle x \rangle$ est fini) donc il existe deux entiers p et q tels que $p < q$ et $x^p = x^q$, soit $x^{q-p} = e$.

Réciproquement supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^* / x^n = e\}$. A étant non vide on peut considérer $\nu = \min A \in \mathbb{N}^*$. Si y est élément de $\langle x \rangle$ il s'écrit x^m pour un $m \in \mathbb{Z}$ (exercice 8). Par division euclidienne de m par ν il existe $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $m = \nu q + r$ et $0 \leq r < \nu$. Comme $x^\nu = e$ on obtient $x^m = x^r$ donc $\langle x \rangle \subset \{e, x, x^2, \dots, x^{\nu-1}\}$. L'inclusion inverse étant vraie on a donc $\langle x \rangle = \{e, x, x^2, \dots, x^{\nu-1}\}$ et ainsi l'élément x est d'ordre fini.

Enfin si i et j appartiennent à $\{0, 1, \dots, \nu-1\}$ avec $i < j$ on a $x^i \neq x^j$ (sinon $x^{j-i} = e$ et $0 < j-i < \nu$ ce qui contredit la définition de ν); par conséquent l'ensemble $\{e, x, x^2, \dots, x^{\nu-1}\} = \langle x \rangle$ est de cardinal ν soit $\nu = \theta(x)$.

(ii) Considérons l'ensemble $B = \{m \in \mathbb{Z} / x^m = e\}$. B est clairement un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et il est distinct de $\{0\}$ d'après le (i), donc $B = \mu\mathbb{Z}$ avec $\mu = \min\{n \in \mathbb{N}^* / x^n = e\}$ (d'après exercice 7 1°) donc $\mu = \theta(x)$ d'après le (i).

Il résulte du (i) et du (ii) que $\theta = \theta(x)$ est caractérisé par :

$$\theta \in \mathbb{N}^* \text{ et } : \forall m \in \mathbb{Z} : x^m = e \Leftrightarrow m \text{ multiple de } \theta.$$

Exercice 10

Soient a et b deux éléments d'ordre fini d'un groupe G . Montrer que l'ordre de (a, b) dans le groupe $G \times G$ est $\text{ppmc}(\theta(a), \theta(b))$.

Exercice 11

1°/ Soient x et y deux éléments d'ordre finis, premiers entre eux, d'un groupe commutatif G . Montrer que l'ordre de xy est égal au produit des ordres de x et y .

2°/ Soit G un groupe commutatif de cardinal fini n . Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppmc des ordres des éléments de G .

(Indication : soit μ ce ppmc et $\mu = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Soit y_1 un élément de G d'ordre $p_1^{\alpha_1} \cdot \mu$; montrer que y_1^{μ} est d'ordre $p_1^{\alpha_1}$. Conclure en utilisant 1°/).