

1.5 Morphismes de groupes

Définitions : Si $(G, \star)$ et $(G', \wedge)$ sont deux groupes, une application f de G dans G' est un *morphisme de groupes* de G dans G' ssi $\forall (x, y) \in G \times G, f(x \star y) = f(x) \wedge f(y)$.

f est un *isomorphisme* ssi f est un morphisme bijectif;

f est un *endomorphisme* de G ssi f est un morphisme de G dans lui-même;

f est un *automorphisme* de G ssi f est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme.

Exercice 12

1°/ L'ensemble des automorphismes d'un groupe G est un groupe pour la composition des applications, noté $\text{Aut}(G)$.

2°/ Pour $a \in G$ donné, l'application $f_a : x \mapsto axa^{-1}$ de G dans G est un automorphisme de G appelé *automorphisme intérieur* de G . L'ensemble $\text{Int}(G)$ des automorphismes intérieurs de G est un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$.

L'application de G dans $\text{Int}(G)$ qui à a associe f_a est un morphisme de groupes dont le noyau est $Z(G) = \{x \in G / ax = xa\}$ (appelé *centre* de G : voir l'exercice 19).

Exercice 13

Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 14

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (voir exercice 12) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (voir exercice 1).

Propriétés : (i) Si f et g sont des morphismes de groupes de G dans G' et G' dans G'' respectivement, alors $g \circ f$ est un morphisme de G dans G''

(ii) Si f est un morphisme de G dans G' :

l'image par f de l'élément neutre e de G est l'élément neutre e' de G' ;

$f(G)$ est un sous-groupe de G' ;

$f^{-1}(e')$ est un sous-groupe de G (appelé *noyau* de f et noté $\text{Ker} f$).

Remarque : $\text{Ker} f = \{e\} \Leftrightarrow f$ injectif.