2.2 Relations d'équivalences compatibles avec la loi d'un groupe

Le théorème suivant donne toutes les relations d'équivalences compatibles à gauche ou à droite avec la loi d'un groupe :

<u>Théorème</u> : les relation d'équivalences R_g (respectivement R_d) compatibles à gauche (respectivement à droite) avec la loi du groupe G sont celle définies par :

$$\forall\, (x, y) \in G\times G \;:\; x\, R_g\, y \;\Leftrightarrow\; x^{-1} y \in H \;\text{ (respectivement } x\, R_d\, y \;\Leftrightarrow\; x y^{-1} \in H)$$

où H est un sous-groupe donné de G.

<u>Démonstration</u> : Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur G compatible à gauche avec la loi du groupe G. Si $x \sim y$ alors $x^{-1}x \sim x^{-1}y$ soit $x^{-1}y \sim e$ ou encore $x^{-1}y \in \overline{e}$, classe de e. D'autre part $e \in \overline{e}$ donc $\overline{e}$ est non vide et si x et y appartiennent à $\overline{e}$ on a $x \sim e$ donc $e \sim x^{-1}$ (en composant à gauche par x^{-1}); comme $y \sim e$ on a de même $x^{-1} y \sim x^{-1}$ soit $x^{-1} y \sim e$ c'est-à-dire $x^{-1} y \in \overline{e}$. $\overline{e}$ est donc un sous-groupe de G.

Réciproquement si H est sous-groupe de G on voit facilement que la relation dans G définie par $x \sim y$ ssi $x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence compatible à gauche avec la loi du groupe.

De même pour les relations d'équivalences compatible à droite avec la loi du groupe.

Si H est un sous-groupe de G on note R_g (respectivement R_d) la relation d'équivalence définie par : $xR_gy \;\Leftrightarrow\; x^{-1} y \in H$ (respectivement $x\, R_d\, y \;\Leftrightarrow\; x y^{-1} \in H$).

La classe suivant R_g d'un élément a de G est :

$$\overline{a} = \{x \in G \,/\, aR_gx\} = \{x \in G \,/\, a^{-1}x \in H\} = \{\, x = ah \,/\, h \in H\}$$

noté aH et appelé <u>*classe à gauche suivant H*</u>.

De même, suivant R_d, la classe de a est $\overline{a} = \{\, x = ha \,/\, h \in H\}$ noté Ha et appelé <u>*classe à droite suivant H*</u>.

On note enfin $(G/H)_g$ et $(G/H)_d$ les ensemble quotients G/R_g et G/R_d.

Exercice 15

Pour tous éléments a et b de G les ensembles H, aH et Hb sont en bijection. En particulier ils ont même nombre d'éléments si H est fini.

Exercice 16

Les ensembles quotients $(G/H)_g$ et $(G/H)_d$ sont en bijection. Si ces ensembles sont finis ils ont donc même nombre d'éléments noté $[G{:}H]$ et appelé *indice de H dans G*.

Exercice 17

1°/ Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Montrer que le cardinal de H divise le cardinal de G (<u>*Théorème de Lagrange*</u>). Plus précisément : Card G = Card $H \times [G{:}H]$ (voir exercice 16).

En bref « l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe ».

(<u>indication</u> : considérer la relation d'équivalence R_g et utiliser l'exercice 15).

2°/ En déduire que dans un groupe fini de cardinal n l'ordre d'un élément divise n.

On peut maintenant préciser toutes les relations d'équivalences compatibles avec la loi d'un groupe ce qui répond à la première question :

<u>Théorème</u> : les relations d'équivalences $\sim$ compatibles avec la loi du groupe G sont celle définies par :

$$\forall\, (x, y) \in G\times G \;:\; x \sim y \;\Leftrightarrow\; x^{-1} y \in H$$

où H est un sous-groupe de G vérifiant, pour tout a de G : $aH = Ha$.

Démonstration : soit $\sim$ une relation d'équivalence compatible avec la loi du groupe G. D'après le théorème précédent il existe des sous-groupes H et H' tes que $x \sim y$ équivaut à $x^{-1}y \in H$ et $xy^{-1} \in H'$. La classe de l'élément neutre est égale à H et à H' donc $H = H'$. La classe de tout a de G est alors égale à aH et à Ha donc $aH = Ha$ pour tout a de G.

Réciproquement si $aH = Ha$ pour tout a de G les relations d'équivalences R_g et R_d compatibles à gauche et à droites suivant le groupe H coïncident (car elles ont les même classes).