2.3 Sous-groupes distingués

<u>Définition</u> : un sous-groupe H de G est dit *distingué* (ou *normal* ou encore *invariant*) ssi pour tout a de G : $aH = Ha$.

On note: $H \lhd G$. Les relations d'équivalences R_g et R_d coïncident alors et l'ensemble quotient $(G/H)_g = (G/H)_g$ se note G/H.

Si H est distingué dans G on peut munir dans (G/H) la loi quotient (voir préliminaires).

<u>Remarques et exemples</u> :

$\{e\}$ et G sont toujours distingués dans G (sous-groupes distingués dits *triviaux*);

Si G est commutatif tout sous-groupe de G est distingué;

l'ensemble des translations est distingué dans le groupe des isométries du plan ou de l'espace.

<u>Caractérisations des sous-groupes distingués</u> : Soit H un sous-groupe de G. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H \lhd G$

(ii) $\forall\ a \in G : aHa^{-1} = H$

(iii) $\forall\ a \in G : aHa^{-1} \subset H$

(iv) H est le noyau d'un morphisme de groupes f de G dans un groupe G'.

<u>Démonstration</u> :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) : clair.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : supposons que pour tout a de G on ait $aHa^{-1} \subset H$. En remplaçant a par a^{-1} on obtient $a^{-1}Ha \subset H$ soit $H \subset aHa^{-1}$ donc $H = aHa^{-1}$. Donc (iii) $\Rightarrow$ (ii) et la réciproque est triviale.

(i) $\Rightarrow$ (iv) : si H est distingué dans G alors G/H est un groupe pour la loi quotient (voir théorème de 2.4) et H est le noyau du morphisme s de groupes de G dans G/H qui à x associe sa classe modulo H (s est la surjection canonique de G sur G/H).

(iv) $\Rightarrow$ (i) : supposons que H soit le noyau d'un morphisme de groupes f de G dans G'. Si $x \in aH$ il s'écrit ah avec $h \in H$; on a aussi $x = (aha^{-1})a$ et $f(aha^{-1}) = f(a)f(h)f(a^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$ (car $f(h) = e'$ élément neutre du groupe G') soit $f(aha^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e'$ donc l'élément aha^{-1} appartient à $H = \mathrm{Ker}\, f$ donc $x \in Ha$. Par suite $aH \subset Ha$. De même on montre que $aH \subset Ha$.

On peut maintenant répondre à la deuxième question.