

## 2.4 Groupes quotients

**Théorème** : si  $H$  est un sous-groupe distingué du groupe  $G$  alors l'ensemble quotient  $G/H$  muni de la loi quotient est un groupe.

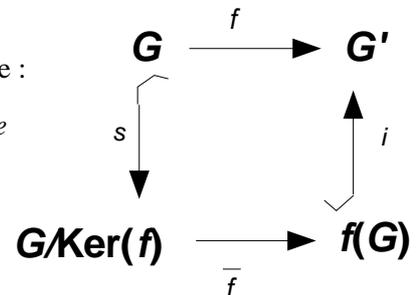
La démonstration est évidente.

Ce groupe est appelé *groupe quotient de  $G$  par  $H$* .

### Exercice 18

Un morphisme de groupes  $f: G \rightarrow G'$  admet pour décomposition canonique :

où  $\bar{f}$  (définie par  $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$  : voir préliminaires) est un *isomorphisme de groupes*.



### Exercice 19

On a :  $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$  (voir exercice 12).

### Exercice 20

On appelle *centre* d'un groupe  $G$  l'ensemble  $Z(G) = \{a \in G / \forall x \in G, ax = xa\}$  (i.e l'ensemble de éléments de  $G$  qui commutent avec tous les autres). Montrer que  $Z(G) \triangleleft G$ .

### Exercice 21

Montrer que  $A_n$  (ensemble des permutations paires de  $S_n$ , c'est-à-dire l'ensembles des permutations de signature  $+1$ ) est un sous-groupe distingué de  $S_n$  de cardinal  $n!/2$  ( $A_n$  est appelé *groupe alterné*) (utiliser la décomposition canonique de la signature).

### Exercice 22

On appelle *groupe dérivé de  $G$*  le sous-groupe de  $G$  engendré par les éléments de la forme  $xyx^{-1}y^{-1}$  et on le note  $D(G)$ . Montrer que  $D(G) \triangleleft G$  et que  $G/D(G)$  est commutatif.

Montrer que si  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$  tel que  $G/H$  soit commutatif alors  $D(G) \subset H$ .

( $G/D(G)$ ) est ainsi le plus « gros » groupe quotient qui soit commutatif).

### Exercice 23

Un groupe  $G$  est dit *simple* s'il n'a pas d'autres sous-groupes distingués que les triviaux  $\{e\}$  et  $G$ .

Montrer que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est simple ssi  $p$  est premier.

**Remarque** : on peut démontrer que  $A_n$  est simple si  $n \geq 5$  (voir exercice 21).