2.4 Groupes quotients

Théorème : si H est un sous-groupe distingué du groupe G alors l'ensemble quotient G/H muni de la loi quotient est un groupe.

La démonstration est évidente.

Ce groupe est appelé *groupe quotient de G par H.*

Exercice 18

Un morphisme de groupes $f : G \to G'$ admet pour décomposition canonique :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & G' \\ G/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\bar{f}"'] & f(G) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

où $\bar{f}$ (définie par $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$: voir préliminaires) est un *isomorphisme de groupes.*

Exercice 19

On a : $\mathrm{Int}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$ (voir exercice 12).

Exercice 20

On appelle *centre* d'un groupe G l'ensemble $Z(G) = \{a \in G \,/\, \forall x \in G, ax = xa\}$ (i.e l'ensemble de éléments de G qui commutent avec tous les autres). Montrer que $Z(G) \triangleleft G$.

Exercice 21

Montrer que A_n (ensemble des permutations paires de S_n, c'est-à-dire l'ensembles des permutations de signature + 1) est un sous-groupe distingué de S_n de cardinal $n!/2$ (A_n est appelé *groupe alterné*) (utiliser la décomposition canonique de la signature).

Exercice 22

On appelle *groupe dérivé de G* le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ et on le note $D(G)$. Montrer que $D(G) \triangleleft G$ et que $G/D(G)$ est commutatif.

Montrer que si H est un sous-groupe distingué de G tel que G/H soit commutatif alors $D(G) \subset H$.

($G/D(G)$) est ainsi le plus « gros » groupe quotient qui soit commutatif).

Exercice 23

Un groupe G est dit *simple* s'il n'a pas d'autres sous-groupes distingués que les triviaux $\{e\}$ et G.

Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple ssi p est premier.

Remarque : on peut démontrer que A_n est simple si $n \geq 5$ (voir exercice 21).