4.1 Définitions

Définition : Soit un groupe G et un ensemble quelconque X. On dit que G *opère sur* X s'il existe une application f de $G\times X$ dans X qui à (g, x) associe $g.x$ telle que :

(i) $\forall\ (g, g') \in G\times G, \forall\ x \in X, g.(g'.x) = (gg').x$

(ii) $\forall\ x \in X,\ e.x = x$.

f est appelée *opération* de G sur X.

On vérifie que la donnée d'une opération de G sur X revient à définir un *homomorphisme de groupes* $\varphi : G \to S(X)$ ($S(X)$ est le groupe des bijections de X dans X), et on a :

$$\forall\ g \in X, \forall\ x \in X :\quad g.x = \varphi(g)(x).$$

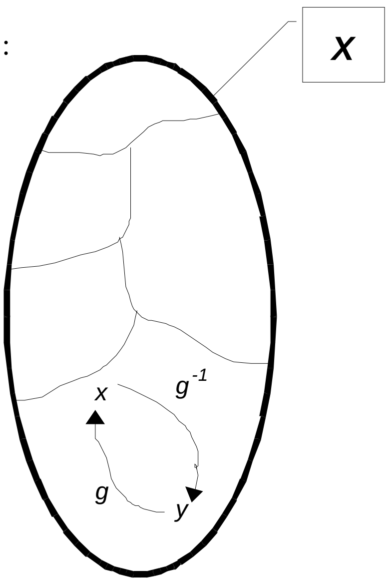
On définit sur X la relation R définie pour tout x et y de X par :

$$x\ R\ y \iff \exists\ g \in G \,/\, y = g.x$$

On vérifie immédiatement que R est une *relation d'équivalence* sur X. Les classes d'équivalences sont appelées *orbites*. L'orbite de $x \in X$ est donc :

$\{y = g.x \,/\, g \in G\}$ et se note $G.x$

On a donc le schéma suivant où est représenté la partition de X constituée par les différentes orbites :



Une opération sur X est *transitive* ssi il n'y-a qu'une seule orbite.

Si de plus g est unique on dit que l'action est *simplement transitive*, c'est-à-dire :

$$\forall\ x \in X, \forall\ y \in X, \exists!\ g \in G \,/\, y = g.x$$

Une opération est *fidèle* si le morphisme φ de G dans $S(X)$ est injective i.e Ker $\varphi = \{e\}$ ou encore si on a :

$$(\forall\ x \in X, g.x = x) \quad\Rightarrow\quad g = e.$$

Remarquons que l'action du groupe quotient $G/\mathrm{Ker}\ \varphi$ est toujours fidèle (considérer la décomposition canonique de φ).

Si x et y, éléments de X, appartiennent à la même orbite il existe en général plusieurs $g \in G$ tels que $y = g.x$. Plus précisément on a :

$$g.x = g'.x \iff (g^{-1}g').x = x.$$

Le sous-groupe de G : $G_x = \{g \in G/\ g.x = x\}$ s'appelle *stabilisateur* (ou *groupe d'isotropie*) de x et on a donc :

$$g.x = g'.x \iff g^{-1}g' \in G_x \iff g' \in gG_x.$$

La proposition suivante précise le lien entre orbite et stabilisateur d'un élément :

Proposition : L'application $(G/G_x)_g \to G.x$

$$\bar{g} \mapsto g.x$$

est une bijection.

Démonstration : l'application f de G dans $G.x$ qui à g associe $g.x$ est surjective. De plus on a :

$f(g) = f(g') \iff g^{-1}g' \in G_x$. D'après la décomposition canonique de f, l'application $\bar{f}$ de $(G/G_x)_g$ dans $G.x$ qui à $\bar{g}$ associe $g.x$ est bijective.

Remarques : • le sous-groupe G_x n'est pas distingué en général dans G et donc $(G/G_x)_g$ n'est pas en général un groupe;

• Si G est fini $|G_x|$ et $|G.x|$ sont des diviseurs de $|G|$.