4.2 Exemples et applications

<u>Opération canonique de *S*(*X*) sur *X*</u> : c'est l'opération :

$$\begin{aligned} S(X)\times X &\to X \\ (\sigma, x) &\mapsto \sigma(x) \end{aligned}$$ (qui est transitive, fidèle mais non simplement transitive; $\varphi = \mathrm{Id}_{S(X)}$)

<u>Exemple</u> : soit σ est une permutation de S_n; en considérant l'action du groupe $<\sigma>$ engendré par σ sur l'ensemble $\{1,\dots, n\}$ définie par $(\sigma, x) = \sigma(x)$ montrer que σ se décompose en produit de cycles disjoints.

De même $S(X)$ agit sur X^n, sur $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X) ...

Un groupe peut agir sur lui-même par *translations à gauche* : $(g, x) \mapsto gx$ (action simplement transitive et fidèle). L'homomorphisme φ correspondant est ici :

$$\begin{aligned} G &\to S(G) \\ g &\mapsto (x \mapsto gx) \end{aligned}$$

et cet homomorphisme de groupes est *injectif*. Donc on a en particulier :

Tout groupe fini de cardinal n se plonge dans S_n (***<u>Théorème de Cayley</u>***).

Si H est un sous-groupe de G, G agit sur l'ensemble $(G/H)_g$ des classes à gauche suivant H par : $(g, aH) \mapsto gaH$ (idem pour les classes à droite).

Donnons-en une application :

Exercice 29

Soit G un groupe infini et H un sous-groupe distinct de G d'indice $[G:H]$ fini. Montrer que G n'est pas simple.

(Considérer le noyau du morphisme de groupes φ correspondant à l'action précédente).

Un groupe peut également agir sur lui-même par *automorphismes intérieurs* (exercice 12) :

$$\begin{aligned} G\times G &\to G \\ (g,a) &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

L'orbite de $a \in G$ s'appelle *classe de conjugaison* : $G.a = \{gag^{-1} \ / \ g \in G\}$; deux éléments appartenant à une même orbite sont dits *conjugués*.

Le stabilisateur de a : $G_a = \{g \in G \ / \ gag^{-1} = a\} = \{g \in G \ / \ ga = ag\}$ s'appelle *centralisateur* de a.

De même G agit sur l'ensemble des sous-groupes de G par automorphismes intérieurs : $g.H = gHg^{-1}$. Le stabilisateur de H est $\{g \in G \ / \ gHg^{-1} = H\}$ et est appelé *normalisateur* de H : c'est le *plus grand* sous-groupe de G dans lequel H soit distingué.

Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$ agit sur $\mathrm{M}(n, \mathbf{K})$ ensemble des matrice carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$ par conjugaison : deux matrices A et B sont conjuguées ssi : $\exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K}) \ / \ B = PAP^{-1}$ i.e ssi A et B sont semblables.