4.3 Equations des classes

Théorème : Si G et X sont *finis* alors on a :

$$|X| = \sum_x |G|/|G_x| \quad \text{où on prend un et un seul } x \text{ dans chaque orbite.}$$

($|A|$ désigne le cardinal de A).

Démonstration : les orbites forment une partition de X donc $|X| = \sum_x |G.x|$ où on prend un et un seul x dans chaque orbite. On conclut grâce la bijection de $(G/G_x)_g$ dans $G.x$ (proposition du 4.1) et au fait que $|(G/G_x)_g| = |G|/|G_x|$ (exercices 16 et 17).

On donne en exercice et en V/ des exemples d'applications de la formule des classes. Donnons-en une autre :

Exercice 30

On appelle *p-groupe* un groupe dont le cardinal est une puissance non nulle d'un nombre premier p.

1°/ Soit G un p-groupe. On suppose que G agit sur un ensemble fini X et on note I l'ensemble des points invariants de X sous G i.e $\{x \in X / \forall g \in G : g.x = x\}$. Montrer que $|X| \equiv |I|$ (p).

2°/ En déduire que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à $\{e\}$ (voir exercice 20).

(faire agir G sur lui-même par automorphismes intérieurs).

En déduire qu'un groupe d'ordre p^2 (p premier) est commutatif.

3°/ Soit G un groupe fini dont le cardinal est divisible par un nombre premier p. Montrer que G a un élément d'ordre p (faire agir le groupe engendré par le cycle $(1, 2, ..., p)$ sur l'ensemble $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in G^p / x_1x_2 \dots x_p = e\}$.,

Exercice 31 : groupe des isométries invariant un cube,

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube et $G+$ le groupe des rotations de l'espace invariant globalement ce cube.

1°/ Montrer que G agit fidèlement sur ensemble des sommets de cube. En déduire que G est un groupe fini.

2°/ Soit O le centre de cube. Montrer que si $f \in G$ alors $f(O) = O$.

3°/ Préciser l'orbite $G_+.A$ et le stabilisateur G_{+A} du sommet A. En déduire que $|G_+| = 24$ (utiliser la proposition du 4.1; on trouve $|G_{+A}| = 3$ et $|G_+.A| = 8$).

4°/ Montrer que G_+ agit sur les 4 diagonales du cube; en déduire que G est isomorphe à S_4.

5°/ En déduire le cardinal du groupe G des isométries de l'espace invariant un cube et préciser tous ses éléments (notamment l'ordre de chaque élément). Ce groupe est-il cyclique ?

6°/ Montrer que G est isomorphe à $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.