5.2 Structure des groupes abéliens de type finis

Un groupe abélien $(G, +)$ est de *type fini* ssi il est engendré par un nombre fini d'éléments i.e s'il existe $e_1, ..., e_n$ dans G tels que tout élément x de G s'écrive : $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n$ avec $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$.

Le théorème suivant décrit entièrement la structure des groupes abéliens de type fini.

<u>Théorème</u> : Soit G un groupe abélien de type fini. Alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/a_m\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, a_2, ..., a_m$ sont des entiers naturels tels que a_1 / a_2, a_2 / a_3, ...,et a_{m-1} / a_m. De plus la suite d'entiers naturels $s(G) = (n, a_1, a_2, ..., a_m)$ caractérise G (si G' est un autre groupe de type fini on a :
$s(G) = s(G')$ ssi G et G' sont isomorphes).

<u>Remarque</u> : bien sûr on a : G fini $\Leftrightarrow$ $n = 0$. Les entiers $a_1, a_2, ..., a_m$ sont alors appelés *facteurs invariants* de G.

Exercice 33

Trouver tous les groupes abéliens d'ordre 20.