

Préliminaires :

Soient E et F deux ensembles, une application f de E dans F et une relation d'équivalence R sur E . On peut définir l'application $\bar{f}$ (de E/R dans F) par :

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) \text{ (où } \bar{x} \text{ désigne la classe de } x\text{)}$$

à condition que $f(x)$ ne dépende pas du représentant choisi dans $\bar{x}$ c'est-à-dire si on a pour tout x et x' de E :

$$x R x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

On dit alors que *la relation R est compatible avec l'application f* et que f « passe au quotient ».

On a : $\bar{f}$ injective ssi la relation R est définie par : $x R x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

Dans ce cas on a le diagramme suivant :

où s est la surjection canonique et i l'injection canonique.

On a : $f = i \circ \bar{f} \circ s$ (décomposition canonique de f) et $\bar{f}$ est une bijection de E/R dans $f(E)$.

Si maintenant E est muni d'une loi de composition interne $*$ et d'une relation d'équivalence R on peut définir de même sur l'ensemble quotient E/R la loi de composition interne $\bar{*}$ par :

$$\bar{x} \bar{*} \bar{y} = \overline{x * y} \quad (\text{pour tout } x \text{ et } y \text{ de } E)$$

à condition que $\overline{x * y}$ ne dépende pas des représentants choisis dans $\bar{x}$ et $\bar{y}$ c'est-à-dire si on a :

$$(x R x' \text{ et } y R y') \Rightarrow (x * y R x' * y').$$

On dit alors que *la relation R est compatible avec la loi de composition interne $*$* , et la loi $\bar{*}$ est appelée « loi quotient ».

On dit que la relation d'équivalence R est *compatible à gauche (resp. à droite) avec $*$* ssi pour tout y de E on a :

$$x R x' \Rightarrow (y * x) R (y * x') \text{ (resp. } (x * y) R (x' * y)).$$

On voit facilement qu'une relation d'équivalence est compatible avec une loi ssi elle est compatible à gauche et à droite avec cette loi.

