1.3 Etude pratique de la convergence d'une suite ou d'une série :

1.3.1 Suites réelles :

On utilise essentiellement les deux résultats suivants :

(i) Soit (u_n) une suite réelle croissante (resp. décroissante). Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \operatorname{Sup}_{n\in N}\{u_n\} \text{ (resp. } \operatorname{Inf}_{n\in N}\{u_n\}),$$

et (u_n) est convergente ssi elle est majorée (resp. minorée).

(ii) "<u>Théorème des gendarmes</u> " : soient (x_n), (u_n), et (y_n) trois suites réelles telles (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite l et que pour n assez grand : $x_n \le u_n \le y_n$. Alors (u_n) converge vers l.

(iii) Si pour n assez grand : $x_n \le y_n$ alors :

si (x_n) diverge vers $+\propto$, (y_n) aussi;

si (y_n) diverge vers $-\propto$, (x_n) aussi.

<u>Démonstration</u> : (i) Supposons (u_n) croissante et majorée. Alors $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ qui admet donc une borne supérieure M. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $M - \varepsilon \le x_N \le M$. Comme (x_n) est croissante, pour $n \ge N$ on a $x_n \ge x_N$ et comme $M = \operatorname{Sup}_{n\in N}\{u_n\}$ on obtient $M - \varepsilon \le x_n \le M$ pour $n \ge N$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \operatorname{Sup}_{n\in N}\{u_n\} = M$.

Si (u_n) n'est pas majoré, étant donné un réel A, il existe un entier naturel N tel que $u_N \ge A$. La suite (u_n) étant croissante on a $u_n \ge A$ pour $n \ge N$, donc la suite (u_n) diverge vers $+\propto$.

Idem si la suite (u_n) est décroissante d'où le (i).

Le reste des démonstrations, faciles, sont laissées en exercice.

Exercice 6

Etudier la convergence des suites suivantes :

❶ $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$; ❷ $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ (<u>indication</u> : pour $x \ge 0$, $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$) ; ❸ $w_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ (<u>indication</u> : $\frac{1}{p^2} \le \frac{1}{p(p-1)}$) ; ❹ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$; ❺ $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p!}$.

Exercice 7 : suites adjacentes

Deux suites (x_n) et (y_n) sont *adjacentes* si (x_n) est croissante, (y_n) est décroissante et si $\lim(y_n - x_n) = 0$.

1°/ Montrer que deux suites adjacentes (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite l. Pour tout entier naturel n on a $x_n \le l \le y_n$.

2°/ Soit $[a_n; b_n]$ une suite décroissante de segments (i.e. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$) telle que $\lim (b_n - a_n) = 0$. Montrer que $\bigcap_{n\ge 0}[a_n; b_n]$ est réduit à un point ("Théorème des segments emboîtés").

3°/ Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \ge 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

4°/ Soient les suites (x_n) et (y_n) définies pour $n \ge 1$ par $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Leur limite commune est la *constant d'Euler*, notée γ. On a donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \le \gamma \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\ .$$

1.3.2 Séries à termes positifs :

Théorème :

(i) Une série à termes positifs est convergente ssi ses sommes partielles sont bornées.

(ii) Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles positives telles que pour n assez grand : $x_n \leq y_n$. Alors :

★ si $\sum y_n$ converge, $\sum x_n$ aussi;

★ si $\sum x_n = +\infty$ alors $\sum y_n = +\infty$;

Démonstration : le (i) résulte du (i) de 1.3.1; le reste, facile, est laissé en exercice.

Corollaires : Soient (x_n) et (y_n) deux suites positives.

(i) Si $x_n = o(y_n)$ et si $\sum y_n$ converge, alors $\sum x_n$ converge;

(ii) Si $x_n \sim y_n$ alors $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont de même nature.

(iii) Règle d'Alembert : on suppose que pour tout entier naturel n : $x_n > 0$ et que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. Alors :

$l < 1$, $\sum x_n$ converge;

$l > 1$, $\sum x_n$ diverge vers + $\propto$.

(iv) Règle de Cauchy : on suppose que $\lim \sqrt[n]{x_n} = l$. Alors on a les mêmes conclusions que pour la règle d'Alembert.

Démonstration : (i) il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n = \varepsilon_n y_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$. Il existe N' tel que $n \geq N' \Rightarrow \varepsilon_n \leq 1$.

Donc pour $n \geq \mathrm{Max}(N, N')$ on a $x_n \leq y_n$ et on conclut par le (i) du théorème précédent.

(ii) De même il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow x_n = \delta_n y_n$ avec $\lim \delta_n = 1$. Il existe N' tel que $n \geq N' \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \delta_n \leq \frac{3}{2}$.

Donc pour $n \geq \mathrm{Max}(N, N')$ on a : $\frac{1}{2}y_n \leq x_n \leq \frac{3}{2}y_n$ et on conclut par le (ii) théorème précédent.

(iii) Si $l < 1$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$. Il existe un entier N tel que $p \geq N \Rightarrow l - \varepsilon \leq \frac{x_{p+1}}{x_p} \leq l + \varepsilon$, soit :

$x_{p+1} \leq (l + \varepsilon)x_p$ pour $p \geq N$. En multipliant membres à membres ces inégalités de $p = N$ à n il vient, pou $n > N$:

$x_{n+1} \leq (l + \varepsilon)^{n-N+1}x_N$ qui est le terme général d'une suite géométrique de raison $l + \varepsilon \in]0; 1[$ et donc d'une série convergente. On conclut par le (ii) du théorème précédent.

Si $l > 1$ on considère $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$ et la démonstration est analogue.

(iii) Si $l < 1$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$ et il existe un entier N tel que $p \geq N \Rightarrow l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{x_n} \leq l + \varepsilon$. Pour $n \geq N$ on a donc $x_n \leq (l + \varepsilon)^n$ qui est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $\in [0; 1[$) d'où le résultat par le (ii) du théorème précédent. Démonstration analogue si $l > 1$.

Remarques : le principe de la démonstration des règles d'Alembert et de Cauchy consiste à comparer la série à une série géométrique : ces règles ne peuvent donc s'appliquer que pour une série convergente dont le terme général tend vers zéro plus vite qu'une suite géométrique de raison $q \in [0; 1[$, ou pour une série divergente dont le terme général tend vers + $\propto$ plus vite qu'une suite géométrique de raison $q > 1$. Cela explique qu'elles ne s'appliquent pas par exemple aux séries de Riemann puisque $q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour α réel et $q \in [0; 1[$ et $\frac{1}{n^\alpha} = o(q^n)$ pour $q > 1$.

Exercice 8

Soit (x_n) une suite à termes > 0 telle que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. Alors $\lim \sqrt[n]{x_n} = l$ (ainsi si la règle d'Alembert a échouée, il est inutile d'essayer celle de Cauchy). Etudier la réciproque.

Applications : trouver la limite des suites suivantes : $\sqrt[n]{C_{2n}^{n}}$; $\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}(n+k)}$.

Si les règles d'Alembert et de Cauchy ont échouées on peut essayer la suivante :

Exercice 9 : Règle de Rabbe-Duhamel

Soit (x_n) une suite à termes > 0 telle que : $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors :

si $\alpha > 1$: $\sum x_n$ converge.

si $\alpha < 1$: $\sum x_n$ diverge.

Application : nature de la série de terme général $a_n = \frac{2.4.\cdots.(2n-n).(2n)}{3.5.\cdots.(2n-1).(2n+1)}$ (on trouve $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la série diverge).

1.3.3 Séries à termes quelconques :

Si $\sum x_n$ est une série à termes quelconques on essaie d'abord de voir si la série $\sum x_n$ est absolument convergente (1.2.2) en employant les méthodes du paragraphe précédent. Sinon on peut employer le critère de Cauchy ou la règle d'Abel valables pour les séries quelconques :

Critère de Cauchy pour les séries : une série $\sum x_n$ est convergente ssi :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \ /\ q \geq p \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{q} x_k\right| \leq \varepsilon \text{ (ou } \left\|\sum_{k=p}^{q} x_k\right\| \leq \varepsilon \text{ si } (x_n) \text{ est une suite à valeurs dans } \mathbb{R}^n).$$

Démonstration : voir II/

Règle d'Abel : supposons que $x_n = \varepsilon_n\, y_n$ où (ε_n) est une suite réelle et (y_n) une suite complexes ou à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que :

(i) (ε_n) est une suite décroissante;

(ii) $\lim \varepsilon_n = 0$;

(iii) $\exists\ A \in \mathbb{R}, \exists\ N \in \mathbb{N} \ /\ q \geq p \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{q} y_k\right| \leq A$ (ou $\left\|\sum_{k=p}^{q} y_k\right\| \leq A$ si (y_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) .

Alors la série $\sum \varepsilon_n y_n$ est convergente. De plus on a la majoration :

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k\, y_k\right| \leq A\ \varepsilon_p \quad \text{(ou } \left\|\sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k\, y_k\right\| \leq A\varepsilon_p).$$

Démonstration : On va utiliser le critère de Cauchy pour les séries.

Posons pour $p \leq q$: $\Sigma_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k\, y_k$ et $A_{p,q} = y_p + ... + y_q$. On a :

$y_r = A_{p,r} - A_{p,r-1}$ pour $r \geq p + 1$ et :

$y_p = A_{p,p}$.

On peut donc écrire :

$\Sigma_{p,q} = \varepsilon_p y_p + \varepsilon_{p+1} y_{p+1} + ... + \varepsilon_q y_q$

$= \varepsilon_p A_{p,p} + \varepsilon_{p+1}(A_{p,p+1} - A_{p,p}) + ... + \varepsilon_q(A_{p,q} - A_{p,q-1})$

$= A_{p,p}(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) + A_{p,p+1}(\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{p+2}) + ... + A_{p,q-1}(\varepsilon_{q-1} - \varepsilon_q) + A_{p,q}\ \varepsilon_q$. (La transformation que l'on vient d'effectuer s'appelle *transformation d'Abel)*).

On a donc, pour $p \geq N$ et en tenant compte que (ε_n) est décroissante :

$\left\|\Sigma_{pq}\right\| \leq \|A_{p,p}\|.(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) + \|A_{p,p+1}\|.(\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{p+2}) + ... + \|A_{p,q-1}\|.(\varepsilon_{q-1} - \varepsilon_q) + \|A_{p,q}\|.\ \varepsilon_q.$

$\leq A(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1} + \varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{p+2} + ... + \varepsilon_{q-1} - \varepsilon_q + \varepsilon_q)$

$= A\ \varepsilon_p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N' tel que $n \geq N' \Rightarrow \varepsilon_n \leq \varepsilon/A$. Si $N'' = \mathrm{Max}(N, N')$ on a pour $N'' \leq p \leq q$: $\left\|\Sigma_{pq}\right\| \leq \varepsilon$.
Par conséquent, d'après le critère de Cauchy, la série $\sum \varepsilon_n y_n$ est convergente.

<u>Exemples d'applications</u> :

<u>séries alternées</u> : $\sum (-1)^n x_n$ avec (x_n) suite décroissante tendant vers zéro.

<u>séries de Fourier</u> : $\sum a_n e^{inx}$ où (a_n) suite décroissante tendant vers zéro et $x \neq 2k\pi$.

Exercice 10

Soit $\sum x_n$ une série convergente avec (x_n) décroissante. Montrer que $\lim nx_n = 0$.

<u>Remarque</u> : pour étudier une <u>suite</u> (u_n) il est parfois plus facile d'étudier la <u>série</u> de terme général $u_{n+1} - u_n$.
L'exercice suivant en donne deux exemples :

Exercice 11

1°/ Soit la suite $u_n = n^n e^{-n}\sqrt{n}$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $u_n \sim Kn!$ (<u>indication</u> : soit $x_n = n!n^{-n-1/2}e^n$; considérer la série de terme général $\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$).

2°/ Etudier la suite $v_n = n^\rho \dfrac{n!}{(\rho+1)(\rho+2)...(\rho+n)}$ où ρ est un réel > 0.