

Introduction : $\mathbb{R}$ est un ensemble muni de deux opérations (addition et multiplication) et une relation d'ordre qui en font un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien et possédant en outre une des propriétés équivalentes suivantes :

- (i) toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure;
- (ii) toute suite croissante et majorée est convergente.
- (iii) une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers zéro a une intersection réduite à un point;
- (iv) deux suites adjacentes convergent vers la même limite;
- (v) toute suite de Cauchy est convergente;

Rappelons qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est *majoré* (resp. *minoré*) ssi il existe un réel α (resp. β) tel que :

$\forall x \in A : x \leq \alpha$ (resp. $\forall x \in A : x \geq \beta$). Le réel α (resp. β) s'appelle un *majorant* (resp. un *minorant*) de A .

La *borne supérieure* de A (resp. *borne inférieure*) est le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants) et on les note $\text{Sup } A$ (resp. $\text{Inf } A$). Si A n'est pas majoré on pose $\text{Sup } A = +\infty$ et si A n'est pas minoré $\text{Inf } A = -\infty$.

La *plus petit* (resp. *plus grand*) *élément* de A est un minorant (resp. majorant) de A qui appartient à A . On le note $\text{Min } A$ (resp. $\text{Max } A$). On a $m = \text{Min } A \Rightarrow m = \text{Inf } A$ (resp. $m = \text{Max } A \Rightarrow m = \text{Sup } A$), et les réciproques sont fausses.

$\mathbb{R}$ archimédien signifie : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$

$\mathbb{R}$ est caractérisé par les propriétés précédentes : on démontre qu'un ensemble ayant toutes ces propriétés est isomorphe à $\mathbb{R}$. On peut effectivement construire un ensemble possédant ces propriétés en utilisant par exemple les suites de Cauchy de rationnels.

On prendra ici la première propriété et on en déduira toutes les autres. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ la borne supérieure de A (si elle existe) est par définition le plus petit des majorants et on la note alors $\text{Sup } A$. De même la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A ; on la note $\text{Inf } A$. On démontre alors facilement :

Caractérisation de borne supérieure et inférieure : soit A une partie de $\mathbb{R}$ et m et M deux réels. On a :

$$M = \text{Sup } A \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \forall x \in A, x \leq M \\ \bullet \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

De même :

$$m = \text{Inf } A \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \forall x \in A, x \geq m \\ \bullet \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$$

On peut remplacer ci dessus $M - \varepsilon < x \leq M$ par $M - \varepsilon \leq x \leq M$ et $m \leq x < m + \varepsilon$ par $m \leq x \leq m + \varepsilon$.

Dans la suite on notera $\mathbf{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle voisinage de a un ensemble contenant un ouvert contenant a (dans un espace métrique ou même dans un espace topologique quelconque). Dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$) un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) est un ensemble contenant un intervalle $[A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A]$).

Dans une première partie on verra les diverses façons d'étudier la convergence d'une suite ou d'une série. La deuxième partie s'intéressera aux applications théoriques des suites, en particulier à l'étude de la topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$.