1.1 Définitions :

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans E, où X et E désignent des espaces métriques. On dit que :

1.1.1 Convergence simple :

(f_n) converge vers une fonction f de X dans E simplement ssi : $\forall\, x \in X : \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$;

1.1.2 Convergence uniforme :

(f_n) converge vers une fonction f de X dans E uniformément dans X ssi :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geq N,\ \forall\, x \in X\ :\ d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon;$$

1.1.3 Convergence en moyenne :

(f_n) converge vers une fonction f de X dans E en moyenne ssi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| = 0$;

1.1.4 Convergence en moyenne quadratique :

(f_n) converge vers une fonction f de X dans E en moyenne quadratique ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|^2 = 0$.

1.1.5 Remarques :

La première définition signifie que la suite $(f_n(x))$ de E est convergente (vers $f(x)$) dans l'espace métrique E.

La deuxième définition est équivalente à :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geq N\ :\ \operatorname{Sup}_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Si $\mathcal{B}$ est l'espace des fonctions bornées de X dans E cela se traduit par : la suite (f_n) de $\mathcal{B}$ converge vers f pour la distance δ de $\mathcal{B}$ définie par : $\delta(f,g) = \operatorname{Sup}_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

Pour les deux autres définitions il faut supposer que les intégrales aient un sens : ce sera le cas si par exemple X est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si les fonctions (f_n) sont continues par morceaux sur X. Remarquons qu'alors f n'est pas définie de façon unique : en effet si une fonction f convient tout autre fonction g telle que $\int_X |f - g| = 0$ convient aussi. Cela provient du fait $f \mapsto \int_X |f|$ et $f \mapsto \sqrt{\int_X |f|^2}$ ne sont pas des normes dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions continues par morceaux de X dans E mais seulement des *semi-normes* : elles ne vérifient pas au premier axiome de la norme, à savoir : $(\|f\| = 0) \Rightarrow (f = 0)$ mais vérifient les deux autres.

Pour éviter cela on considère dans $\mathcal{C}$ la relation d'équivalence définie par : $f \sim g$ ssi $\int_X |f - g| = 0$. Dans l' espace vectoriel quotient $\mathcal{C}$ l'application $f \mapsto \int_X |f|$ est bien définie (i.e l'application correspondante de $\mathcal{C}$ passe au quotient) et c'est une norme de $\mathcal{C}$. Remarquons que les éléments de $\mathcal{C}$ sont définis modulo les fonctions négligeables (i.e les fonctions f telles que $\int_X |f| = 0$). Les applications $f \mapsto \int_X |f|$ et $f \mapsto \sqrt{\int_X |f|^2}$ sont alors des normes dans $\mathcal{C}$ appelées respectivement *norme de la convergence en moyenne* et *norme de la convergence en moyenne quadratique.*