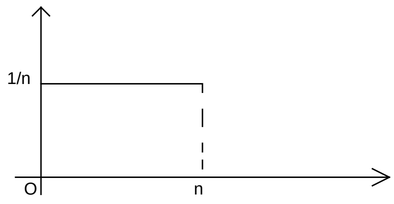
1.2 Liens entre les divers types de convergence :

Bien sûr si la suite (f_n) converge vers f uniformément sur X alors elle converge vers f simplement dans X.

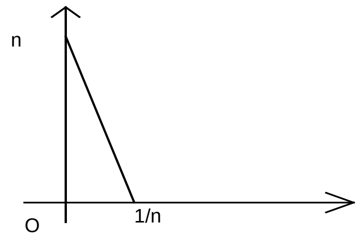
convergence simple n'implique pas convergence en moyenne : pour la suite f_n définie ci-contre par son graphique on a:

$f_n \to 0$ simplement (et même uniformément) dans $\mathbb{R}$ et pas en moyenne car $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1$.



convergence en moyenne n'implique pas convergence simple :

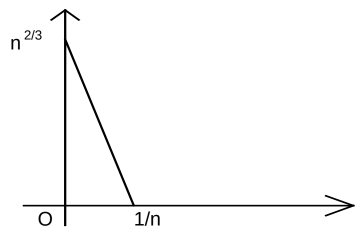
Sur [0;1] on a f_n qui converge en moyenne vers 0 et $f_n(0)$ qui diverge.



convergence en moyenne quadratique implique convergence en moyenne (sur un intervalle compact) : cela résulte immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_X |f_n - f| \leq \sqrt{\int_X 1} \cdot \sqrt{\int_X |f_n - f|^2} .$$

convergence en moyenne n'implique pas convergence quadratique : considérer la suite définie de fonctions f_n définies par leurs graphique ci-contre.



convergence uniforme sur un intervalle compact implique la convergence en moyenne et en moyenne quadratique : exercice.

convergence simple n'implique pas la convergence uniforme :

par exemple la suite de fonctions définies sur [0;1[par $f_n(x) = x^n$ converge 0 simplement mais pas uniformément.

Démonstration : supposons que (f_n) converge uniformément sur [0;1[; sa limite serait encore 0 et on aurait :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geq N,\ \forall\ x \in [0;\ 1[\ : x^n \leq \varepsilon.$$

Prenons par exemple $\varepsilon = 1/2$. Il existerait alors un entier N' tel que tout réel x de [0; 1[: $x^{N'} \leq 1/2$, ce qui est absurde car $\lim_{x\to 1-} x^{N'} = 1$.