1.3 Critères et conditions suffisantes de convergence uniforme :

Vu l'importance de la convergence uniforme on donne quelques critères ou conditions suffisantes de telle convergence. On donne d'abord une définition plus générale de cette notion :

1.3.1 Définition générale de la convergence uniforme :

Soient X et Y deux espaces topologiques; E un espace métrique muni d'une distance d A une partie de Y et $a \in \overline{A}$. On dit qu'une fonction f de $X \times A$ dans E tend vers la fonction φ de X dans E uniformément dans X quand y tend a avec $y \in A$ ssi :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a \text{ voisinage de } a \text{ tel que : } \forall\ y \in V_a \cap A, \forall\ x \in X : d(f(x, y), \varphi(x)) \leq \varepsilon.$$

(le voisinage V_a de a ne dépend donc que de ε et pas de x).

Exemple : si on prend $Y = \mathbb{N} \cup \{+ \infty\}$, $a = +\infty$, $A = \mathbb{N}$ et, pour tout x de X et tout entier naturel n, $f(x, n) = f_n(x)$, on retrouve la définition d'une suite de fonctions tendant vers φ uniformément dans X.

(les ensembles $[N, + \infty]$ constituant une base de voisinage de $+\infty$).

1.3.2 Critère de Cauchy uniforme :

Avec les mêmes notations que la définition précédente, on suppose de plus que E est un espace métrique complet. Une fonction f de $X \times A$ dans E converge uniformément sur X vers une fonction φ de X dans E quand y tend a avec $y \in A$ ssi :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a \text{ voisinage de } a \text{ tel que : } \forall\ y \in V_a \cap A, \forall\ y' \in V_a \cap A, \forall\ x \in X : d(f(x, y), f(x, y')) \leq \varepsilon.$$

Démonstration : elle utilise le

Lemme (Critère de Cauchy généralisé) : Soit Y un espace topologique, A une partie de Y, $a \in \overline{A}$ et E un espace métrique complet. Une application g de A dans E admet une limite quand y tend vers a avec $y \in A$ ssi :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a \text{ voisinage de } a \text{ tel que : } \forall\ y \in V_a \cap A, \forall\ y' \in V_a \cap A : d(g(y), g(y')) \leq \varepsilon$$

Démonstration du lemme : Soit g vérifiant les conditions du lemme. Pour $\varepsilon = 1$ il existe un voisinage V_1 de a tel que pour tous y et y' de $V_1 \cap A$: $d(g(y), g(y')) \leq 1$. De même, pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un voisinage W_2 de a tel que pour tous y et y' de $W_2 \cap A$: $d(g(y), g(y')) \leq 1/2$.Posons $V_2 = W_2 \cap V_1$. On construit ainsi aisément par récurrence une suite V_n (pour $n \geq 1$) de voisinages de a, décroissante (pour l'inclusion), telle que :

$$\forall\ y \in V_n \cap A, \forall\ y' \in V_n \cap A : d(g(y), g(y')) \leq 1/n.$$

Pour $n \geq 1$ soit $x_n \in V_n \cap A$. Si p et q sont des entiers tels que $q \geq p \geq n$ on a x_p et x_q éléments de $V_p \cap A$ puisque (V_n) est décroissante d'où : $d(g(x_p), g(x_q)) \leq 1/p$. Cette inégalité prouve que la suite $(g(x_n))$ de E est de Cauchy, donc convergente vers l de E et en passant à la limite quand q tend vers $+ \infty$ elle montre que pour tout $p \geq 1$, $d(g(x_p), l) \leq 1/p$. Montrons que g tend vers l quand y tend vers a, $y \in A$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier r tel que $2/r < \varepsilon$.

Soit $y \in V_r \cap A$; on écrit :

$$d(g(y), l) \leq d(g(y), g(x_r)) + d(g(x_r), l) \leq 1/r + 1/r = 2/r \leq \varepsilon. \text{ Donc } \lim_{y \to a, y \in A} g(y) = l.$$

La condition nécessaire, facile, est laissée en exercice.

Fin de la démonstration : supposons que f vérifie :

$$(*) \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a \text{ voisinage de } a \text{ tel que : } \forall\ y \in V_a \cap A, \forall\ y' \in V_a \cap A, \forall\ x \in X : d(f(x, y), f(x, y')) \leq \varepsilon.$$

Fixons x : le lemme prouve que la fonction $y \mapsto f(x, y)$ admet une limite $\varphi(x)$ quand y tend vers a, $y \in A$. Dans (*) faisons tendre y' vers a; on obtient :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a \text{ voisinage de } a \text{ tel que : } \forall\ y \in V_a \cap A, \forall\ x \in X : d(f(x, y), \varphi(x))) \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que f tend vers φ quand y tend vers a, $y \in A$, uniformément dans X.

La condition nécessaire, facile, est laissée en exercice.

Comme dans l'exemple précédent, en prenant $A = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $a = +\infty$, $A = \mathbb{N}$ et successivement : $f(x, n) = f_n(x)$, puis $f(x,n) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ on obtient :

Corollaire : critères de Cauchy uniforme pour les suites et séries de fonctions :

(i) Une suite (f_n) de fonctions de X (espace topologique) dans E, espace métrique complet converge uniformément dans X ssi :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall\ p \geq N, \forall\ q \geq N, \forall\ x \in X : d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$$

(ii) Soit (f_n) une suite de fonctions de X (espace topologique) dans E, espace de Banach. La série de fonctions $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément dans X ssi :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall\ p \geq N, \forall\ q \geq p, \forall\ x \in X\ :\ \left\| \sum_{k=p}^{q} f_k(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

(on obtient (ii) en considérant dans E la distance associée à la norme $\|.\|$ et définie par : $d(x, y) = \|x - y\|$).

1.3.3 Convergence normale :

Définition : Soit une suite (f_n) de fonctions de X (espace topologique) dans E, espace de Banach. On dit que la série de fonctions $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est *normalement convergente* dans X si et seulement s'il existe une suite réelle (a_n) telle que :

la série $\sum a_n$ est convergente et : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x \in X : \|f_n(x)\| \leq a_n$.

Remarque : cela équivaut à dire que $\operatorname{Sup}_{x \in X} \|f_n(x)\|$ est le terme général d'une série convergente.

L'intérêt des séries normalement convergentes est qu'elle donnent une condition suffisante de convergence uniforme

Théorème : Avec les notations précédentes, si la série de fonctions $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est normalement convergente dans X alors elle y est uniformément convergente.

Démonstration : soit $\varepsilon > 0$; d'après le critère de Cauchy pour les séries réelles, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\ p \geq N$, $\forall\ q \geq p$: $\sum_{k=p}^{q} a_k \leq \varepsilon$. Pour de tels entiers on a, pour tout x de X :

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=p}^{q} a_k \leq \varepsilon$$

, d'où le résultat grâce au critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions.

Donnons deux exemples d'applications :

Exercice 1

Une série entière de rayon de convergence R non nul converge normalement pour $|z| \leq \rho$ pour tout réel $\rho \in [0, R[$.

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^2 dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Montrer que sa série de Fourier est normalement convergente dans $\mathbb{R}$.

1.3.4 Critère d'Abel :

Soit une série de fonctions de terme général $f_n(x) = \varepsilon_n(x)g_n(x)$ où (ε_n) est une suite de fonctions réelle, (g_n) une suite de fonction de X (espace topologique) dans E (espace de Banach). On suppose :

(i) $(\varepsilon_n(x))$ est une suite décroissante de fonctions;

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n(x) = 0$, uniformément sur X;

(iii) il existe un réel $A > 0$ et un entier naturel N tel que :

$$\forall\ q \geq p \geq N,\ \forall\ x \in X : \left\|\sum_{k=p}^{q} g_k(x)\right\| \leq A.$$

Alors la série de fonctions $\sum f_n(x)$ est uniformément convergente dans X.

De plus on a la majoration : $\left\|\sum_{k=p}^{q} \varepsilon_k(x) g_k(x)\right\| \leq A\varepsilon_p(x)$.

Démonstration : On va utiliser le critère de Cauchy uniforme pour les séries.

Posons pour $p \leq q$: $\Sigma_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} \varepsilon_n g_n$ et $A_{p,q} = g_p + ... + g_q$. On a :

$g_r = A_{p,r} - A_{p,r-1}$ pour $r \geq p + 1$ et :

$g_p = A_{p,p}$.

On peut donc écrire :

$\Sigma_{pq} = \varepsilon_p g_p + \varepsilon_{p+1} g_{p+1} + ... + \varepsilon_q g_q$

$= \varepsilon_p A_{pp} + \varepsilon_{p+1}(A_{p,p+1} - A_{p,p}) + ... + \varepsilon_q(A_{pq} - A_{p,q-1})$

$= A_{p,p}(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) + A_{p,p+1}(\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{p+2}) + ... + A_{p,q-1}(\varepsilon_{q-1} - \varepsilon_q) + A_{pq}\varepsilon_q$. (La transformation que l'on vient d'effectuer s'appelle *transformation d'Abel)*).

On a donc, pour $x \in X$ et $q \geq p \geq N$ et en tenant compte que (ε_n) est décroissante :

$$\left\|\Sigma_{p,q}(x)\right\| \leq \left\|A_{p,p}(x)\right\|\left(\varepsilon_p(x) - \varepsilon_{p+1}(x)\right) + \left\|A_{p,p+1}(x)\right\|\left(\varepsilon_{p+1}(x) - \varepsilon_{p+2}(x)\right) + ... + \left\|A_{p,q-1}(x)\right\|\left(\varepsilon_{q-1}(x) - \varepsilon_q(x)\right) + \left\|A_{p,q}(x)\right\|\varepsilon_q(x)$$

$\leq A(\varepsilon_p(x) - \varepsilon_{p+1}(x) + \varepsilon_{p+1}(x) - \varepsilon_{p+2}(x) + ... + \varepsilon_{q-1}(x) - \varepsilon_q(x) + \varepsilon_q(x))$

$= A\ \varepsilon_p(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N' tel que $p \geq N' \Rightarrow \varepsilon_p(x) \leq \varepsilon/A$ pour tout x de X d'après (ii).

Pour $q \geq p \geq \text{Max}(N, N')$ et $x \in X$ on a donc :

$\left\|\Sigma_{p,q}(x)\right\| \leq \varepsilon$, d'où le résultat grâce au critère de Cauchy uniforme.

Exercice 3

Soit (a_n) une suite réelle tendant vers 0 en décroissant. Montrer que la série $\sum a_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé ne contenant pas $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.3.5 Théorème de Dini :

Soit X un espace métrique compact et $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On suppose que chaque f_n est continue, que la suite (f_n) est croissante et converge simplement sur X vers une fonction f continue. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout t de X il existe un entier $n(t)$ tel que pour $n \geq n(t)$ on a :

$$0 \leq f(t) - f_n(t) \leq \varepsilon/3 \text{ (} (f_n) \text{ étant croissante, } f_n(t) \leq f(t) \text{ pour tout } t \text{ de } X).$$

Comme f et $f_{n(t)}$ sont continues en t, il existe un voisinage ouvert $V(t)$ de t tel que pour tout t' de $V(t)$:

$$|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon/3 \text{ et } |f_{n(t)}(t) - f_{n(t)}(t')| \leq \varepsilon/3.$$

On en déduit facilement que pour tout t' de $V(t)$ on a :

$$f(t') - f_{n(t)}(t') \leq \varepsilon.$$

Les $V(t)$ forment un recouvrement ouvert de X compact, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $V(t_1)$, $V(t_2)$, ... , $V(t_p)$. Posons $N = \text{Max}(n(t_i))$. Soit $t \in X$; il existe $i \in \{1,..., p\}$ tel que $t \in V(t_i)$. Pour $n \geq N$ on a alors :

$$0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n(t_i)}(t) \quad \text{(car } (f_n) \text{ croissante)}$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{car } t \in V(t_i).$$

<u>Autre démonstration</u> : Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les ensembles $F_n = \{x \in X \,/\, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Comme les fonctions f_n et f sont continues, les ensembles F_n sont fermés, donc compacts en tant que fermés inclus dans un compact (voir chapitre "Complément de topologie", 2.2, corollaire (ii)). Comme la suite (f_n) est croissante les ensembles F_n forment une suite décroissante ($\forall\, x \in X$, $|f_{n+1}(x) - f(x)| = f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x)$). La suite (f_n) convergeant simplement sur X vers f on a $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \varnothing$ et par conséquent il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \varnothing$ (chapitre "Complément de topologie", exercice 5). Pour $n \geq N$ et $x \in X$ on a alors $|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_N(x) \leq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite de fonctions polynômes définie par récurrence par :

$$\forall\, t \in [0; 1] \;:\; u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) \text{ et } u_0(t) = 0.$$

Montrer que (u_n) converge uniformément sur $[0; 1]$ vers $\sqrt{t}$.