2.1 lim(lim)

2.1.1 Théorème général : lim(lim)

Soient X et Y deux espaces topologiques, E un espace métrique complet, A et B deux parties de X et Y respectivement. Soient $(a,b) \in \overline{A} \times \overline{B}$ et une fonction f de $A \times B$ dans E. On suppose :

(i) $\lim_{x \to a, x \in A} f(x,y) = g(y)$, <u>uniformément dans B</u>;

(ii) $\lim_{y \to b, y \in B} f(x,y) = h(x)$ <u>simplement dans A</u>;

Alors :

g a une limite quand y tend vers b, $y \in B$;

h a une limite quand x tend vers a, $x \in A$;

ces deux limites sont égales : $\lim_{x \to a, x \in A} \left(\lim_{y \to b, y \in B} f(x,y) \right) = \lim_{y \to b, y \in B} \left(\lim_{x \to a, x \in A} f(x,y) \right)$.

<u>Remarque</u> : dans les conditions du Théorème la limite double $\lim_{\substack{(x,y) \to (a,b) \\ (x,y) \in A \times B}} f(x,y)$ existe et est égale aux deux limites précédentes.

<u>Démonstration</u> : D'après (i) :

(1) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a$ voisinage de a tel que : $\forall\ x \in V_a \cap A, \forall\ y \in B : d(f(x, y), g(y)) \leq \varepsilon$.

Montrons d'abord que g a une limite quand y tend vers b avec $y \in B$. Pour cela employons le critère de Cauchy généralisé. Fixons x_0 dans $V_a \cap A$. D'après (ii) et le critère de Cauchy généralisé appliqué à $f(x_0, .)$ et (ii), il existe un voisinage V_b de b tel que :

(2) pour tout y et y' de $V_b \cap B$, on ait : $d(f(x_0, y): f(x_0, y')) \leq \varepsilon$.

Ecrivons, pour y et y' éléments de $V_b \cap B$:

$d(g(y), g(y')) \leq d(g(y), f(x_0, y)) + d(f(x_0, y) + f(x_0, y')) + d(f(x_0, y'), g(y'))$.

Dans le deuxième membre, le premier et le troisième terme est majoré par ε d'après (1) et le deuxième par ε d'après (2). Par conséquent pour y et y' éléments de $V_b \cap B$:

(3) $d(g(y), g(y')) \leq \varepsilon$. Le critère de Cauchy généralisé montre que la fonction g a une limite l quand y tend vers b, $y \in B$.

En passant l'inégalité du (1) à la limite quand y tend vers b, $y \in B$ on obtient donc :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ V_a$, voisinage de a tel que : $\forall\ x \in V_a \cap A$: $d(h(x), l) \leq \varepsilon$

donc : $\lim_{x \to a, x \in A} h(x) = l$ D'où le théorème.

Ecrivons : $d(f(x, y), l) \leq d(f(x, y), g(y)) + d(g(y), l)$. En prenant $x \in V_a \cap A$ il vient $d(f(x, y), g(y)) \leq \varepsilon$ d'après (1). En prenant $y \in V_b \cap B$ et en faisant tendre y' vers b avec $y' \in B$ dans (3) on obtient $d(g(y), l) \leq \varepsilon$. Finalement $d(f(x, y), l) \leq 2\varepsilon$ pour $x \in V_a \cap A$ et $y \in V_b \cap B$ ce qui donne le résultat de la remarque.

Corollaire 1

Soient (f_n) une suite de fonctions de Y, espace topologique, dans E <u>espace métrique complet</u>; B une partie de Y et $b \in \overline{B}$. On suppose pour :

(i) Pour tout entier n, $\lim_{x \to b, x \in B} f_n(x) = b_n$;

(ii) (f_n) converge uniformément dans B vers f.

Alors la suite (b_n) est convergente; la fonction f admet une limite quand x tend vers b avec $c \in B$ et ces deux limites sont égales : $\lim\limits_{x \to b, x \in B} f(x) = \lim b_n$

Corollaire 2

Soient (f_n) une suite de fonctions de Y, espace topologique, dans E espace métrique complet; B une partie de Y et $b \in \overline{B}$. On suppose pour :

(i) Pour tout entier n, f_n est continue sur Y;

(ii) (f_n) converge uniformément dans Y vers f.

Alors f est continue sur Y.

En bref : "une limite uniforme de fonctions continues est continue".

2.1.2 Corollaire 3 (lim(Σ))

Soient (f_n) une suite de fonctions de Y, espace topologique, dans E espace de Banach; B une partie de Y et $b \in \overline{B}$. On suppose :

(i) Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x \to b, x \in B} f_n(x) = b_n$;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément dans B.

Alors : $\lim\limits_{x \to b, x \in B} \left(\sum\limits_{n \geq 0} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n \geq 0} b_n$.

Démonstration : on applique le théorème précédent avec $f(n, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$, $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A = \mathbb{N}$.

2.1.3 Corollaire 4

Soient (f_n) une suite de fonctions de Y, espace topologique, dans E espace de Banach. On suppose :

(i) Pour tout entier n la fonction f_n est continue sur Y;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément dans Y vers f.

Alors la fonction f est continue sur Y.

Démonstration : résulte immédiatement du corollaire 2.

2.1.4 Exemples

Exercice 5

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est uniformément convergente sur [0; 1]. En déduire : $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 6

Pour $x > 1$ on pose : $\xi(x) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \xi(x) = 1$.

Exercice 7

Soit $C(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X , espace métrique compact, dans E espace de Banach muni de la norme : $\|f\| = \operatorname{Sup}\limits_{x \in X} \|f(x)\|$ (norme de convergence uniforme). Montrer que $C(X, E)$ est un espace de Banach.