2.3 ($\Sigma(\Sigma)$) :

2.3.1 Théorème

Soit $a_{m,\,n}$ une suite double d'un espace de Banach E. On suppose que $\sum_n \left(\sum_m \| a_{m,n} \| \right) < +\infty$. Alors on a :

$$\sum_m \left(\sum_n a_{m,n} \right) = \sum_n \left(\sum_m a_{m,n} \right) \text{que l'on note} \sum_{m,n} a_{m,n} \ .$$

On démontre ce théorème en 2.3.2 dans un cadre plus général.

2.3.2 Notion de famille sommable

Définition : soit I un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, espace de Banach et notons $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S \in E$ ssi :

(1) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que : $B \in \mathcal{P}_f(I)$ et $B \supset A \Rightarrow \left\| S - \sum_{i\in B} a_i \right\| < \varepsilon$.

Considérons dans $\mathcal{P}_f(I) \cup \{\propto\}$ la topologie définie de la façon suivante : une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}_f(I) \cup \{\propto\}$ est ouverte ssi elle ne contient pas $\propto$ ou alors si elle contient $\propto$ ainsi que tous les sur-ensembles d'une partie B finie de I. La définition (1) signifie alors l'application $A \mapsto \sum_{i\in A} a_i$ de $\mathcal{P}_f(I)$ dans E a pour limite S quand A tend vers $\propto$ avec $A \in \mathcal{P}_f(I)$.

Dans ces conditions le critère de Cauchy s'écrit :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A \in \mathcal{P}_f(I) \text{ tel que : } J \in \mathcal{P}_f(I) \text{ et } J \cap A = \varnothing \Rightarrow \left\| \sum_{i\in J} a_i \right\| < \varepsilon.$$

On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est absolument sommable ssi la famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable. Dans ces conditions le théorème va résulter de deux lemmes :

lemme 1

Si une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace de Banach est absolument sommable alors elle est sommable.

lemme 2 (sommation par paquets)

Soit une famille $(a_i)_{i\in I}$ sommable d'éléments d'un espace de Banach et $(I_k)_{k\in K}$ une partition de I. Alors pour tout k de K la famille $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable; si sa somme est b_k, la famille $(b_k)_{k\in K}$ est sommable et : $\sum_{k\in K} b_k = \sum_{i\in I} a_i$.

démonstration du lemme 1 : résulte immédiatement de l'inégalité triangulaire et du critère de Cauchy.

démonstration du lemme 2 : montrons que la famille $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable. Soit $k \in K$ et $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy il existe D une partie finie de I telle que pour toute partie finie E disjointe de D : $\left\| \sum_{i\in E} a_i \right\| \le \varepsilon$. Pour E' partie finie de I_k disjointe de $D \cap I_k$ on a donc $\left\| \sum_{i\in E'} a_i \right\| \le \varepsilon$. D'après le critère de Cauchy la famille $(a_i)_{i\in I_k}$ est donc sommable.

D'autre part S désignant la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ il existe une partie finie A de I telle que pour toute partie finie B de I telle que $B \supset A$: $\left\| S - \sum_{i\in B} a_i \right\| < \varepsilon$.

Soit $H = \{k \in K \,/\, A \cap I_k \neq \varnothing\}$. A étant un ensemble fini, il en est de même de H.

Soit H' une partie finie de K contenant H.

Posons p = Card H'. Pour tout $k \in K$, la famille $(a_i)_{i\in I_k}$ étant sommable de somme b_k, il existe une partie fini B_k de I_k telle que : $C \in \mathcal{P}_f(I_k)$ et $C \supset B_k \Rightarrow \left\| b_k - \sum_{i\in C} a_i \right\| < \varepsilon/p$.

Posons pour $k \in H'$: $C_k = B_k \cup (I_k \cap A)$, et $A' = \bigcup_{k\in H} B_k \cup (I_k \cap A) = \bigcup_{k\in H} C_k$ qui est une partie finie de I. On a donc pour tout k de H' : $\left\| b_k - \sum_{i\in C_k} a_i \right\| < \varepsilon/p$ (car $C_k \supset B_k$). On écrit :

$$\left\| S - \sum_{k\in H'} b_k \right\| \leq \left\| \sum_{k\in H'} \left(b_k - \sum_{i\in C_k} a_i \right) \right\| + \left\| \sum_{\substack{i\in \cup C_k \\ k\in H'}} a_i - S \right\| \leq \sum_{k\in H'} \left\| b_k - \sum_{i\in C_k} a_i \right\| + \left\| \sum_{\substack{i\in \cup C_k \\ k\in H'}} a_i - S \right\|$$

Le premier terme du second membre est $\leq p.\varepsilon/p = \varepsilon$ et comme $\bigcup_{k\in H'} C_k \supset \bigcup_{k\in H} C_k = A' \supset A$ le second terme du second membre est $\leq \varepsilon$.

Finalement on a $\left\| S - \sum_{k\in H'} b_k \right\| \leq 2\varepsilon$ pour toute partie finie H' de K contenant H : la famille (b_k) est donc sommable de somme S ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Fin de la démonstration du théorème : les hypothèses du théorème montrent que les sommes $S_A = \sum_{(m,n)\in A} \|a_{m,n}\|$ où A est une partie finie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont bornées. Soit M la borne supérieure de ces sommes pour A parcourant les parties finies de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. $\varepsilon > 0$ étant donné il existe une partie finie B de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ telle que : $M - \varepsilon \leq S_B \leq M$. Pour toute partie finie C de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ contenant B on a donc :

$M - \varepsilon \leq S_B < S_C \leq M$, d'où : $|M - S_C| \leq \varepsilon$. La famille $(\|a_{m,n}\|)$ est ainsi sommable (de somme M) et la famille $(a_{m,n})$ est absolument sommable donc sommable (lemme 1). On conclut par le lemme 2.

<u>Remarque</u> : soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de <u>réels positifs</u>. Si les sommes partielles $\sum_{i\in A} a_i$ pour A partie finie de I sont bornées on montre de même que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S = \operatorname{Sup}_{A\in P_f(I)} \sum_{i\in A} a_i$. Si les sommes partielles ne sont pas bornées on pose $S = +\infty$. L'écriture $\sum_{i\in I} a_i$ a ainsi toujours un sens si les a_i sont des réels positifs ou nuls.

Exercice 10

a/ Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de <u>réels positifs</u> et $(I_k)_{k\in K}$ une partition de I. Montrer que l'on a toujours:

$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i$. En particulier <u>s'il existe</u> une partition $(I_k)_{k\in K}$ de I telle que $\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i = S < +\infty$ alors la famille (a_i) est sommable et $\sum_{i\in I} a_i = S$.

***b*/** En déduire une généralisation du théorème : si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un espace de Banach telle qu'il existe une partition $(I_k)_{k\in K}$ de I avec $\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} \|a_i\| < +\infty$ alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

Exercice 11

Pour quelles valeurs de α la famille $\left(\frac{1}{(m+n+1)^\alpha} \right)$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est-elle sommable ?